Proposition sujets Maths en Jean 2021

4 octobre 2021

1 Lucky Numbers

Dans le jeu *Lucky Numbers*, un sac contient des jetons de 1 à 20 (pour chaque nombre, il y a autant de jetons que joueurs). Le but est de remplir un tableau de taille 4 par 4 (voir la figure 1) avec les deux conditions suivantes :

— Les nombres mis sur une ligne sont strictement croissants de gauche à droite.

— Les nombres mis sur une colonnes sont strictement croissants du haut vers le bas.

Au début, chaque joueur pioche 4 jetons qu'il met sur la diagonale puis, chacun leur tour, les joueurs vont pouvoir :

— Prendre un jeton qui aurait été mis de de côté et le placer.

— Piocher un jeton et soit le placer, soit le mettre de côté.

Quand un joueur place un jeton, il peut soit le mettre dans un emplacement libre, soit remplacer un de ses jetons ; dans les deux cas, il devra respecter les règles vues plus haut.

Figure 1 – Image du jeu *Lucky Number*.

Le but de ce sujet est de comprendre s'il y a des meilleures stratégies que d'autres. Pour ce faire, nous proposons de commencer par regarder un plateau de 2 par 2 et de se demander quelle la probabilité de le remplir juste en tirant des jetons (on supposera qu'il n'y a que deux joueurs). Ensuite, nous proposons de regarder un plateau de 3 par 3 et de réfléchir, suivant le jeton tiré, quelle sera la position optimale à chaque fois. Enfin, nous pourrons regarder le vrai plateau du jeu. Pour ce dernier, il serait intéressant de coder des stratégies déterministes ou aléatoires et de les faire s'affronter.

2 Le défi des déménageurs (proposé par Clément Jourdana)

Un camion d'une capacité $100 \times 20 \times 1$ est initialement rempli avec des cartons, tous identiques, de taille $1 \times 1 \times 1$. Deux déménageurs devant le vider se lancent un défi : celui qui décharge le dernier carton (celui en bas au fond du camion) a perdu. Ils déchargent les cartons les uns après les autres en commençant par celui du haut à l'entrée du camion. Par contre, pour éviter de faire tomber des cartons, leur patron leur impose à chaque fois de prendre uniquement des cartons disposés en rectangles (c'est à dire des blocs $a \times b \times 1$). Quelle est la stratégie à adopter pour gagner ? Que se passe-t-il si on change la taille du camion ? Si on met une limite sur a et b ? Si on peut prendre des carrés de cartons n'importe où ? Et si on rajoute une dimension ?

3 L'odyssée de la fourmi

Une fourmi se promène sur un quadrillage rempli de cases de couleurs blanches et noires. Elle a un comportement très simple :

— Si elle arrive sur une **case blanche**, elle se tourne à **gauche** et avance d'une case.

— Si elle arrive sur une **case noire**, elle se tourne à **droite** et avance d'une case.

A chaque fois qu'elle quitte une case, elle change la couleur de cette dernière (si la case est noire, elle devient blanche et inversement). Étant donné un quadrillage de taille 8×8 et deux carrés de ce quadrillage, est-il (toujours) possible de colorier le quadrillage pour que la fourmi aille d'une des cases vers l'autre ? De plus, est-ce que si la fourmi arrive à aller d'une case à une autre, est-ce qu'elle est toujours capable de faire le chemin inverse ?

Si on laisse se balader la fourmi sans l'arrêter, est-ce qu'elle va toujours revenir aux mêmes endroits ? Est-ce qu'elle va rester dans un espace clos ou contraire s'éloigner toujours plus de son point de départ ?

Et que se passe-t-il si on utilise plus de couleurs et/ou de directions possibles ? Ou si, une fois qu'elle quitte la case, la couleur change aléatoirement ?

4 Décomposons

En arithmétique, nous disons que 4 divise 20 car si nous faisons 20 divisé par 4, nous obtenons 5 qui est un entier naturel. Par contre, 4 ne divise pas 22 car $22/4 = 5,5$ qui n'est pas entier. De manière générale, nous disons que l'entier m divise l'entier n s'il existe un entier k tel que $m \times k = n$. L'étude des diviseurs d'un nombre est un point important pour plein de problèmes.

Dans ce sujet, étant donné un entier naturel n nous allons nous intéresser à l'ensemble $\mathcal{C}_n$ des chiffres (donc des nombres compris entre 0 et 9) qui divisent le nombre n. Par exemple, nous avons $\mathcal{C}_{114} = \{1, 2, 3, 6\}$; remarquons que 57 divise 114 mais comme ce n'est pas un chiffre, il n'apparaît pas dans la liste. Nous pouvons nous interroger sur le comportement de ces ensembles, par exemple : est-ce qu'il existe un entier naturel n qui admet tous les chiffres comme diviseurs ? Est-ce qu'il existe des chiffres qui se retrouvent dans tous les $\mathcal{C}_n$ quelque soit la valeur de n ? Quel est le plus petit entier naturel positif n dont l'ensemble $\mathcal{C}_n$ est exactement $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$? Peut-on prévoir facilement pour certains chiffres s'ils se retrouveront ou pas dans l'ensemble $\mathcal{C}_n$?

Dans un second temps, on pourra s'intéresser à l'ensemble $\mathcal{U}_n$ des chiffres unités des diviseurs de n. Par exemple, nous avons $\mathcal{U}_{114} = \{1, 2, 3, 6, 7, 8, 9\}$ car en plus des chiffres déjà présentés précédemment, nous avons 19, 38 et 57 qui divisent 114. Existe-t-il un lien entre $\mathcal{C}_n$ et $\mathcal{U}_n$? Par exemple, est-ce que l'un est toujours inclus dans l'autre ? Quelle est la condition pour que 0 appartienne à $\mathcal{U}_n$? En bref, on peut se demander ce qui change entre $\mathcal{C}_n$ et $\mathcal{U}_n$

5 Impossible de s'arrêter

Le jeu *can't stop* se joue de 2 à 4 joueurs avec quatre dés à tour de rôle. Le plateau se décompose en 11 traits verticaux symbolisant les chiffres représentant les sommes possibles de deux dés (donc de 2 à 12), chaque colonne contient un nombre de cases allant de 3 pour les chiffres 2 et 12 à 13 pour le chiffre 7 (voir la figure 2). Un tour de jeu se déroule de la façon suivante :

1. Le joueur lance les 4 dés et choisis de les regrouper par pair et additionne les chiffres. Par exemple, s'il a une fois le chiffre 1, une fois le chiffre 2, une fois le chiffre 3 et une fois le chiffre 4, il peut faire les paires :
   — (1,2) et (3,4) ce qui donne 3 et 7
   — (1,3) et (2,4) ce qui donne 4 et 6
   — (1,4) et (2,3) ce qui donne 5 et 5
2. Si le joueur n'a pas encore utilisé ses totems, il en prend deux (resp un) s'il a deux sommes différentes (resp s'il a la même somme) et avance d'une case (resp de deux) sur chaque ligne de la somme correspondante. Dans notre exemple, le joueur a le choix entre avancer d'une case sur les lignes 3 et 7 ou sur les lignes 4 et 6 ou alors de deux cases sur la ligne 5.
3. Si le joueur a déjà utilisé tous ses totems, il ne peut avancer que les lignes sur lesquelles se trouvent les totems. De même, s'il ne lui reste d'un seul totem non utilisé, il peut soit le mettre et/ou avancer un autre déjà en place.
4. Le joueur décide ensuite entre :
   — S'arrêter. Dans ce cas, on met ses jetons de couleurs aux emplacements et le joueur repartira de ces positions.
   — Relancer les dés. Dans ce cas, il prend le risque d'obtenir une combinaison qui ne fonctionne pas et de tout perdre.

   Une fois qu'un joueur a réussi à avancer un totem jusqu'en haut d'une ligne, il la gagne et plus personne ne peut alors tenter cette dernière (ceci peut ainsi rendre plus de configurations impossibles). Le premier joueur à avoir gagné 3 lignes gagnent.

FIGURE 2 – Plateau du jeu *Can't stop.*

La première question qu'on peut se poser est de calculer quelle est la probabilité qu'on remplisse une ligne en une seule manche suivant les valeurs des chiffres : est-ce que le 7 est plus facile à avoir que le 2 ? On peut notamment se demander quelle est la probabilité de faire avancer le totem d'une ligne à chaque lancé de dés. Ensuite, comme nous avons 3 totems, on peut se demander si des combinaisons de 3 chiffres ont plus de chances d'être tirées que d'autres afin de pouvoir relancer plus souvent les dés.

Nous pourrons comparer tout ceci de façon théorique ou en simulant plusieurs stratégies et en les comparant.

6 Quand le chaos nous guette

Prenez un nombre strictement compris entre 0 et 1 que nous appellerons x puis calculez $2x(1-x)$, recommencez avec le résultat est ainsi de suite. Par exemple, nous avons l'ensemble suivant :

$$\frac{1}{3} \to \frac{4}{9} \to \frac{40}{81} \to \cdots$$

Vers quel nombre cette suite semble se diriger ? Est-ce le même nombre quelque soit le point de départ ?

Faites maintenant la même chose en prenant la formule $4x(1-x)$ avec un chiffre x et $x+10^{(-6)}$. Qu'observez-vous ?

Toujours la même question mais cette fois avec $3.1x(1-x)$.

En fait, suivant les valeurs a de $ax(1-x)$, nous pouvons avoir un système stable ou chaotique. Le but de ce projet est d'observer en fonction de la valeur de a quand est-ce que nous sommes dans un système stable et quand est-ce que nous sommes dans un système chaotique [1].

7 Intelligence équestre

Dans le jeu *Hop ! Hop ! Galopons !* [2], le but est d'amener son cheval à l'écurie situé à 14 cases tout en récupérant des matériaux (1 botte de carottes, 1 botte de foin, 1 sceau d'eau et 4 fers à cheval) ; voir la Figure 4. Pour ce faire, le joueur lance à chaque tour un dé bleu et un dé rouge. Sur le dé bleu, il y a 1 face *carotte*, une *foin*, une *sceau d'eau*, deux *fer à cheval* et une face *étoile* et, sur le dé rouge, il y a les trois chiffres 1, 2 et 3 répétés deux fois. Une fois les deux dés lancés, le joueur choisi de prendre le résultat du dé rouge **OU** le résultat du dé bleu : dans le premier cas, on avance le cheval d'autant de cases que le dé l'indique (inutile de faire un nombre pile pour arriver dans l'écurie) ; dans le second, on complète un carton représentant les matériaux qu'on doit récupéré (si on tombe sur l'*étoile*, on peut choisir n'importe lequel). Dans ce sujet, on va chercher à savoir s'il existe une stratégie qui gagne plus souvent que les autres. Par exemple, vaut-il mieux privilégier le remplissage de notre carton ou plutôt faire avancer notre cheval ? Et si on tombe sur l'étoile, vaut-il mieux privilégier les fers à cheval ou les autres matériaux ? On peut se demander s'il est plus facile de remplir le carton que d'emmener le cheval à l'écurie par exemple...

Dans un second temps, on peut s'intéresser à la règle consistant à ajouter un ou deux obstacles sur le parcours : dans ce cas, le cheval n'a pas le droit de s'arrêter sur les cases avec un obstacle. Est-ce que les stratégies changent ? Est-ce que le problème est le même qu'importe où se situe l'obstacle ?

Et on peut même créer nos propres règles : allonger le chemin, demander plus de matériaux, devoir faire pile le nombre de cases pour arriver à l'écurie...

8 L'opérateur losange

L'opérateur losange $\diamond$ est défini pour tout a et b entiers par :

$$a \diamond b = a^2 + 3^b.$$

1. Cette idée m'est venue à partir de la vidéo `https://www.youtube.com/watch?v=YrOyRCD7M14`. Nous pourrons faire retrouver aux étudiants le graphe de la 13ème minute.

2. de l'éditeur *HABA*

FIGURE 3 – Plateau du jeu *Hop ! Hop ! Galopons !*.

Calculer $(3 \diamond 4) \diamond (1 \diamond 2)$. Est-ce que les parenthèses sont obligatoires ? Ou, autrement dit, est-ce que $(a \diamond b) \diamond c = a \diamond (b \diamond c)$? Est-ce que le nombre obtenu est toujours un entier ? En particulier, que se passe-t-il si a ou b sont négatif ? Est-ce que les nombres obtenus peuvent être premiers ?

Est-ce que les réponses restent les mêmes si on change les valeurs de 2 et 3 par autre chose ?

9 Suite de PGCD et de PPCM

Prenons deux nombres, par exemple 252 et 189 puis prenons le PGCD (plus grand diviseur commun) de ces deux nombres auquel nous ajoutons le premier nombre soit 63+252=315. Si nous recommençons en prenant le deuxième nombre avec le résultat, nous obtenons la suite de nombres suivante :

$$252 \to 189 \to 315 \to 252 \to 378 \to \cdots$$

et ainsi de suite. Est-ce que la suite va à un moment donné proposer toujours le même numéro ? Est-ce que, quand nous prenons deux nombres successifs, nous avons le même PGCD ?

Faisons maintenant pareil avec le PPCM (Plus petit multiple commun). Retrouve-t-on les mêmes constations ?

Que se passe-t-il si au lieu d'ajouter les résultats, nous retranchions le PGCD au premier nombre dans le premier cas et nous retranchions le premier nombre au PPCM dans le second cas ?

10 Le charlatan et l'intelligence artificielle

Vous êtes un charlatan qui veut participer à un concours de potions magiques[3] où vous avez à votre disposition un sac contenant deux types d'ingrédients : des ingrédients *explosifs* et des ingrédients *bonus* avec chacun un pouvoir magique numéroté de 1 à 3. Le but est de créer une potion la plus puissante possible (c'est-à-dire avec la plus grande somme des ingrédients magiques) en choisissant judicieusement les ingrédients. Le petit problème est que vous n'avez pas le droit de regarder dans le sac quel ingrédient vous prenez et, comme vous êtes un charlatan, vous ne savez pas faire la différence entre les ingrédients

3. Cet exercice est une libre adaptation du jeu de société de 2018 appelé *Les charlatans de Belcastel*

explosifs et les ingrédients *bonus*. Vous allez donc devoir les choisir au hasard. Par contre vous savez que, dans votre sac, il y a 10 ingrédients répartis en :

— 4 ingrédients *explosifs* de puissance 1, 2 de puissance 2 et 1 de puissance 3.

— 1 ingrédient *bonus* de puissance 1, 1 de puissance 2 et 1 de puissance 3.

Il y a trois règles à se souvenir :

1. Vous tirez les ingrédients les uns après les autres et après chaque tirage, vous avez le droit de vous arrêter.
2. Dès que vous sortez un ingrédient du sac, vous devez le mettre dans votre marmite (pas le droit de le remettre discrètement dans le sac et d'en tirer un autre).
3. Si la somme des puissances des ingrédients *explosifs* dépasse strictement 7, votre marmite explose et vous avez perdu.

La question qu'on peut donc se poser est de savoir comment maximiser les chances d'avoir une potion la plus puissante possible. Par exemple, on peut choisir de s'arrêter s'il reste dans le sac au moins un jeton qui peut faire exploser la marmite (par exemple si j'ai déjà tiré les jetons *explosifs* de puissances 3 et 2 et que si je tire un jeton *explosif* de puissance 1, la somme atteint 8) mais, dans ce cas, on risque peut-être d'être trop frileux. On peut aussi décider de s'arrêter lorsque le risque de faire exploser la marmite dépasse 1 chance sur 2 ou lorsque nous avons tiré tous les jetons bonus.

Pour répondre à cette question, nous pouvons commencer par regarder quelles configurations font exploser la marmite ? Quelles sont celles qui donnent la plus grande puissance magique ? Nous pouvons aussi prendre une stratégie et regarder la probabilité d'atteindre la puissance magique magique maximale ou une puissance au moins supérieure à 10 par exemple.

Comme il y a beaucoup de stratégies possibles et que faire tous les calculs peut parfois être complexe, nous pouvons aussi utiliser les principes de l'intelligence artificielle : nous programmons quelques stratégies auxquelles nous pensons et nous les faisons s'affronter un grand nombre de fois pour voir celle(s) qui gagne(nt) le plus souvent. Nous pouvons aussi réfléchir à des stratégies évolutives : nous laissons à l'ordinateur choisir au hasard une stratégie et s'il gagne, faire en sorte qu'il la choisira plus souvent à l'avenir alors que s'il perd, il faudrait qu'il la choisisse moins souvent. Nous pourrons alors observer les stratégies qui fonctionneraient le mieux.

11 Échec et domino

Prenons un échiquier, c'est-à-dire un carré de 64 cases (8 lignes et 8 colonnes), et des dominos qui font la taille de deux cases. Est-il possible de recouvrir totalement l'échiquier avec ces dominos ?

Imaginons maintenant que nous enlevons deux cases situées à deux sommets opposés (en haut à gauche et en bas à droite) et posons nous la même question. Est-ce que la réponse est identique ? Et si on enlève deux cases n'importe où sur l'échiquier ?

De même, que se passe-t-il si on prend des dominos plus gros (par exemple des rectangles de 3 cases par 2) ? Ou alors des formes totalement différentes ? Ou des échiquiers plus originaux ? Est-il possible de savoir *facilement* si on pourra recouvrir la zone complètement ou non ?

12 Sondages et temps de parole

Durant un moment, il avait été question de donner le temps de paroles de candidats à une élection en fonction des intentions de votes obtenues dans les sondages. Concrètement, cela veut dire que si deux candidates (Alice et Barbara) se présentent à une élection et qu'un sondage suggère que 40% des gens pensent voter pour Alice et 60% pour Barbara alors Alice aura 40% du temps de parole tandis que Barbara aura 60%. Dans ce sujet, nous essayons d'évaluer l'influence de cette réforme sur les votes.

Pour cela, partons du principe qu'un premier sondage est fait sur 100 personnes pour savoir pour qui chacun pense voter et chaque personne a 60% de chance de répondre Barbara et 40% Alice. À la suite de ces réponses (par exemple, 35 répondent Barbara et 65 Alice), le temps de paroles est calculé (65% Barbara et 35% Alice) et nous faisons l'hypothèse que cela influence les probabilités de vote de la même façon pour le sondage suivant. Que se passe-t-il si nous répétons l'opération une centaine de fois ? Est-ce que les résultats changent si nous interrogeons plus ou moins de personnes ? Si les pourcentages de départ sont très différents (par exemple 10% contre 90%) ?

Enfin, comme ouverture, nous pouvons aussi imaginer que le temps de paroles n'influence que partiellement sur les votes et voir comment les résultats évoluent.

13 Et si la terre était plate ?

Une enquête de la fondation Jean Jaurès [4] estime que 9% des français pensent que la Terre est plate (on appelle ces personnes les *platistes*). Les théories diffèrent suivant les personnes mais nous allons prendre ici celle qui suppose que la Terre serait une immense pizza dont la croûte est un mur de glace (un peu comme dans *Game Of Thrones*) : ce serait l'antarctique (au sud du globe terrestre) qui n'est pas pour ces platistes un continent et le pôle nord serait donc le centre du disque.

Partant de cet axiome, nous allons essayer de reconstruire la forme de la Terre telle que la voient les platistes (voir la figure 5). Pour cela, nous pouvons commencer par nous demander comment projeter les longitudes et les latitudes ; quelles tailles font-elles notamment ? Quelle est la longueur du rayon ? Quelle aire fait la terre des platistes ?

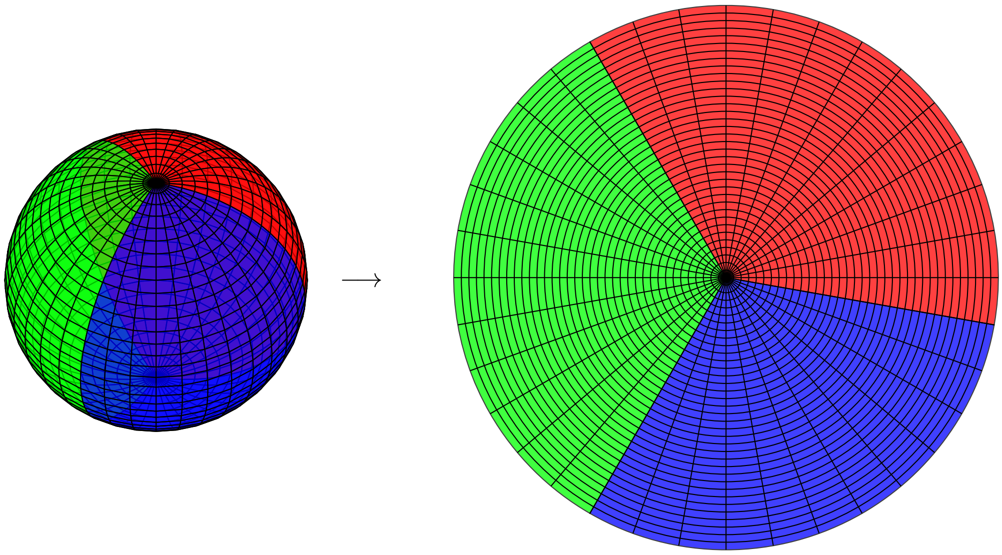


FIGURE 4 – Figure de l'exercice 16 où nous schématisons le passage de la boule à sa projection vers un disque.

Une fois les réponses obtenues, nous pouvons nous demander comment se représente la France ? Et des pays dans l'hémisphère sud comme l'Australie ? Est-ce que l'île de la Réunion serait toujours plus petite que la Grande Bretagne ? Quel pays serait alors le plus grand du monde ?

4. Retrouver l'étude sur `https://jean-jaures.org/nos-productions/le-conspirationnisme-dans-l-opinion-publique-francaise`

14 Cryptologie et Statistique

Une façon d'encoder un texte est de prendre, par exemple, pour chaque lettre, la suivante (A→B, B→C, ..., Y→Z, Z→A). En terme mathématique, si on associe à chaque lettre un chiffre (A=0, B=1, ..., Z=25), cela revient à ajouter 1 et à conserver le reste dans la division euclidienne par 26. Or, nous pourrions décider, par exemple, de multiplier le chiffre par 3, ainsi :

$$\begin{array}{rcl} A = 0 \to 0 \times 3 = 0 & \text{donc} & A \to A, \\ B = 1 \to 1 \times 3 = 3 & \text{donc} & B \to D, \\ & \vdots & \\ Z = 25 \to 25 \times 3 = 2 \times 26 + 23 & \text{donc} & Z \to X. \end{array}$$

Si on prend n'importe quelle fonction affine (donc de la forme $f(x) = ax+b$), est-ce qu'on obtient toujours un codage que nous pouvons décrypter ? Autrement dit, est-ce qu'à une lettre du texte crypté correspond une unique lettre du texte original ? Est-ce qu'à deux couples (a, b) et (a', b'), le codage sera-t-il forcément différent ?
Existe-t-il d'autres fonctions qui permettent d'avoir des codages différents de ceux des fonctions affines ?

Imaginons qu'un texte crypté arrive et que vous n'avez pas la clef pour le décrypter. Si vous faites un décryptage par seconde, combien de temps faudra-t-il pour essayer tous les textes possibles ?
Au IX$^{\text{ème}}$ siècle, Al-Kindi a remarqué que certaines lettres apparaissaient plus souvent que d'autres. Il a donc proposé, si le texte est assez long, d'associer la lettre du texte crypté qui revient le plus souvent à la lettre le plus souvent utilisé dans la langue, puis la deuxième à la deuxième... Comment feriez-vous pour tester ce codage ?

15 Bouillon de particules

L'atmosphère est remplie de particules qui ne cessent de s'entrechoquer tout le temps. Nous supposons que les particules se déplacent sur un plan,enfermées dans un rectangle de taille 10×15, que chacune d'elles avance toujours dans la même direction (qui sera supposée parallèle à l'axe des abscisses ou des ordonnées) à une vitesse d'une unité par seconde jusqu'à rencontrer un mur ou une autre particule et que, dans ce cas, elles repartent dans la direction strictement opposées.

Par exemple, sur la figure 6, nous avons représenté plusieurs configurations de départ. Dans le cas où il n'y a qu'une seule particule qui commence son déplacement parallèlement aux longueurs du rectangle alors elle va juste faire des aller-retours sur le même segment. Dans le second cas, les particules vont entrer en collisions régulièrement alors qu'elles ne vont jamais se croiser dans le troisième cas.

Dans ces trois cas, nous obtenons une configuration périodique c'est-à-dire que si nous appelons $C(t)$ la position de toutes les particules à un temps t alors il existe un entier $T > 0$ tel que pour tout $t > 0$, $C(t + T) = C(t)$ (dans le premier cas, $T = 30$ fonctionne mais aussi $T = 60$). Nous appelons *période* le plus petit T vérifiant la condition précédente.

Quelque soit la configuration initiale, existe-il toujours une période ? Si oui, suivant le nombre de particules, quelle est la plus petite période ? La plus grande ?

Que se passe-t-il si les particules ne vont pas à la même vitesse ? Si elles ne sont plus contenues dans un rectangle mais dans une forme plus originale ? Voir pas contenues du tout ?

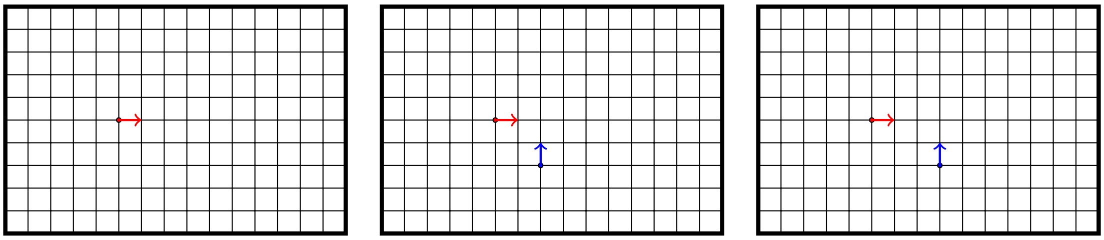


FIGURE 5 – Exemples de configurations initiales pour les particules.

16 La clé du mystère

Dans un commissariat, les $n \geq 3$ inspecteurs n'ont pas tellement confiance entre eux. Ainsi, la salle des pièces à conviction est fermée par plusieurs serrures de telle sorte que :

— 3 inspecteurs quelconques ou plus peuvent ouvrir la salle

— Mais 2 quelconques ou moins ne peuvent jamais l'ouvrir

Combien faut-il de serrures au minimum ?
Généraliser pour un nombre minimal $m \leq n$ d'inspecteurs.
Un commissaire vient d'être muté dans le commissariat. La règle reste la même pour les inspecteurs mais le commissaire doit pouvoir ouvrir la pièce si l'un des inspecteurs est avec lui mais pas s'il est tout seul. Combien a-t-on au minimum de serrures ?

Remarque 16.0.1 *Ce sujet est un peu fermé mais assez complexe pour des secondes.*

17 Le serpent qui se mord la queue (probabilité et programmation)

Le jeu du serpent se joue à deux joueurs. Chaque joueur possède un serpent de couleurs différentes (rouge et bleu) qui avancent à la même vitesse dans un pavé de taille fini et dont la longueur de la queue croît à chaque déplacement. A chaque instant, le joueur peut décider que son serpent tourne à droite, tourne à gauche ou continue sur sa lancée. Le joueur dont le serpent rencontre un mur ou l'une des queues a perdu.
Peut-on trouver une stratégie aléatoire meilleure que les autres ?
Est-ce que cette stratégie peut faire perdre un joueur humain ?

Remarque 17.0.1 *Ce sujet peut même avoir deux équipes qui pourront comparer leurs algorithmes. Dans ce cas, je veux bien fournir un programme support pour afficher les matchs.*

18 Maladie génétique récessive

Une maladie génétique est une maladie due à une ou plusieurs anomalies sur un ou plusieurs chromosomes qui entraînent un défaut de fonctionnement de certaines cellules de l'organisme [5]. Pour schématiser, chaque chromosome d'un enfant est composé de deux allèles qui sont chacun transmis par leur parent. Prenons l'un d'eux et supposons que les deux allèles ne peuvent posséder que deux statuts : "S" pour sain et "M" pour malade. Il existe donc 4 couples d'allèles possibles : (S, S), (S, M), (M, S) et (M, M).

5. Source : wikipédia

Dans le cas d'une maladie génétique dite récessive, l'enfant n'est malade que s'il (ou elle) possède les deux allèles (M, M). S'il n'en possède qu'un seul (cas (S, M) ou (M, S)), il peut transmettre la maladie mais n'est pas malade (on parle de porteur sain). Lorsque deux adultes décident de faire un enfant, ils vont chacun transmettre l'un des gènes avec la même probabilité. Pour la suite, nous admettons qu'un enfant malade (M, M) ne peut pas lui même avoir d'enfant.

Expliquer pourquoi si la maladie n'était pas récessive (c'est-à-dire que les personnes ayant les couples (S, M) ou (M, S) seraient aussi malades), elle aurait disparu immédiatement. Quelles sont les configurations possibles de couples de parents pouvant avoir un enfant ? Pour chacune de ces configurations, quelles sont les chances qu'ils aient un enfant malade ? Si 5% des personnes qui peuvent avoir un enfant sont porteurs sains, en prenant deux personnes au hasard, quelle est la probabilité d'avoir un enfant malade ? Inversement, on estime qu'un enfant sur 3500 souffre de mucoviscidose (qui est une maladie génétique récessive), quelle est la proportion de porteurs sains dans la population ?

Supposons qu'à chaque génération, il y a autant d'enfants que d'adultes pouvant procréer et prenons une population de 100 personnes dont 10 sont des porteurs sains et admettons de plus, on forme exactement 50 couples différents qui vont chacun avoir 2 enfants. Quelles sont les combinaisons possibles ? Est-ce que nous pouvons n'avoir que des malades ? Quelle est la probabilité que la maladie disparaisse (c'est-à-dire qu'il n'y aura plus que des (S, S) à la génération suivante) ?

Si on réitère le procédé pour la génération suivante (en ne conservant que les personnes pouvant avoir des enfants) et ainsi de suite, quelle est la probabilité que la maladie disparaisse ? Que la population finisse par n'avoir que des malades ?

19 Paradoxes

Il existe de nombreux résultats qui vont à l'encontre de nos intuitions premières. Par exemple :

- Il y a "autant" de points sur un segment fini que sur une droite infinie.
- $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ possèdent autant de points.
- Si on prend un groupe de 23 personnes, il y a plus de 50% de chance que deux d'entre elles aient leur anniversaire le même jour.
- Il existe une suite de nombres décimaux qui converge vers π.
- $\mathbb{R}$ est plus "grand" que $\mathbb{Q}$.
- Il existe des triangles dont la somme des angles vaut plus de 180° et d'autres avec une somme valant moins.
- Deux portes, un garde. Derrière l'une des portes, le paradis, derrière l'autre, l'enfer. Vous avez le droit de poser une et une seule question au garde mais attention : on sait soit qu'il ment toujours, soit qu'il dit toujours la vérité mais dans l'instant, on ne sait pas ce qu'il a choisit de faire. Quelle question posée pour être sûr de connaître la bonne porte ?

Pouvez-vous démontrer ces résultats (ou d'autres du même style) ?

Remarque 19.0.1 *Il serait important d'introduire la notion de bijection pour comprendre les idées de cardinalité qu'il y a derrière.*

20 GPS

Michael roule sur l'autoroute. A un moment, il regarde son GPS et les chiffres suivants changent en même temps :

Arrivée dans	1h20
Sortez dans	120 km

Les indications du GPS sont fixées sur la conduite actuelle de Michael qui roule à 130 km/h. Il se demande alors si les chiffres vont à nouveau être identiques s'il conserve la même vitesse tout le temps de l'autoroute ? Combien de fois ? Pour combien de temps ?
Y a-t-il une vitesse où il peut augmenter le nombre de fois ou le temps où les chiffres seront identiques ?

21 Feriez-vous un bon cryptanalyste ?

Une nouvelle branche de la cryptologie cherche à trouver des solutions entières à des équations diophantiennes c'est-à-dire aux équations comme :

$$\begin{aligned} 3x^2+3y^2 &= 12 \\ x^3+x^2+x+1 &= 0 \end{aligned}$$

Seriez-vous capable de dire en regardant une équation s'il existe des solutions entières ou non ? Et si oui, quelles sont-elles ?
Pouvez-vous généraliser à tout type d'équations diophantiennes ?

22 Les feux de l'amour

Annabelle, Bernard, Coralie et Didier se situent chacun à un sommet d'un carré (ABCD). Comme tout bon feuilleton américain, Annabelle aime Bernard qui n'a d'yeux que pour Coralie qui se languit pour Didier qui ne pense qu'à Annabelle. A un instant donné, ils décident, tous en même temps, de se diriger vers l'être qu'ils aiment. En admettant qu'aucun obstacle ne se trouve à l'intérieur du carré, vont-ils se rencontrer ? Si oui, quelle sera la trajectoire de chacun ?

La série marchant tellement bien, la production augmente le nombre de personnages (avec toujours la même idée). Que deviennent les trajectoires ?
Et si on en faisait une télé-réalité en mettant des obstacles sur les trajectoires ?

23 Il n'en restera qu'un

On considère un échiquier de taille illimitée sur lequel on dispose n^2 jetons. Au début, ces jetons sont mis dans un tableau $n \times n$. On met un jeton par case.
À chaque étape, on choisit un pion et on le fait sauter horizontalement ou verticalement au dessus d'une case adjacente occupée par un jeton vers une case vide située immédiatement derrière. On enlève alors la pièce sautée.

Pour quelles valeurs de n peut-on espérer terminer le jeu avec un seul jeton sur l'échiquier ?
À n fixé, comment poser les pions sur l'échiquier pour pouvoir trouver une stratégie permettant de finir avec un seul pion ?

24 Fête des voisins

On dispose d'un tableau $n \times n$ et on place un nombre réel sur chaque case de son bord.

Est-il possible de remplir le reste du tableau de telle sorte que chaque case soit la moyenne des quatre adjacentes ? Et des 8 adjacentes ?
Peut-on faire la même chose avec des nombres entiers ?

25 Tournois de tennis

Huit joueurs de tennis s'affrontent en quart de finale pour gagner la coupe. On suppose que chaque joueur i a une compétence c_i positive et on supposera que s'il affronte le joueur j, il gagnera son match avec probabilité $p_{ij} = \frac{c_i}{c_i+c_j}$.
En moyenne, quelles est la probabilité pour chaque joueur de gagner le tournoi ?
Si on suppose que les p_{ij} sont des probabilités quelconques, que deviennent les résultats ?
Et si on généralise à des tournois plus grands ?

Remarque 25.0.1 *Le faible nombre de joueurs peut permettre aux élèves de faire les calculs à la main (peut-être en commençant par la finale, puis les demi-finales et ainsi de suite). Par contre, il faudra faire ce résultat sur toutes les permutations possibles (mais on peut commencer par des cas équiprobables). Ils pourront également simuler les matchs pour trouver les gagnants.*

26 La guerre des Gaules

Deux villages gaulois Rififix et Pacifix sont voisins depuis toujours mais ne peuvent pas se supporter. Chaque année, pour chaque village, on observe que :

— chaque habitant du village a un enfant avec probabilité p_e,

— chaque habitant a une probabilité p_{mn} de mourir naturellement,

— chaque habitant a une probabilité p_t^R (pour le village Rififix, resp. p_t^P pour le village Pacifix) d'être tué par le village adverse. On admettra que si l'année d'avant, il y a N_R habitants dans le village Rififix et N_P dans le village Pacifix alors $p_t^R = \frac{cN_R}{N_R+N_P}$ et $p_t^P = \frac{cN_P}{N_R+N_P}$ avec $c \in]0;1[$.

Que va-t-il se passer si les deux villages continuent à se faire la guerre ?
Que se passera-t-il si le village Pacifix décide d'être moins agressif que le village Rififix (c'est-à-dire que c dépend du village avec $c_P < c_R$) pour se concentrer sur une meilleure natalité (c'est-à-dire que $p_e^P > p_e^R$) ?

Remarque 26.0.1 *Ce sujet ressemble à celui des maladies à la différence qu'il y a deux clans qui s'opposent. Du coup, si les deux camps sont équilibrés, l'un des deux au moins va s'éteindre. Pour la deuxième question, tout dépend de la proportion de naissance par rapport à l'agressivité de l'autre village. Les élèves pourront essayer de schématiser de façon déterministe ou de faire des simulations.*

27 Chaîne alimentaire

Dans un parc, il y a une population de lions et de gazelles. En admettant qu'il y a N_L lions et N_G gazelles au début de chaque année, nous admettons qu'on observe :

— pour chaque gazelle, une nouvelle naissance avec probabilité p_e^G,

— pour chaque lion, une nouvelle naissance avec probabilité p_e^L,

— chaque gazelle a une probabilité $p_m^G \frac{1+N_L}{1+N_L+N_G}$ de mourir (soit naturellement, soit mangée par un lion),

— chaque lion a une probabilité $\frac{N_L}{N_L+N_G}$ de mourir (soit naturellement, soit par manque de nourriture).

Que se passera-t-il si les lions sont trop gourmands (p_m^G élevé) ? Si les gazelles font beaucoup d'enfants (p_e^G élevé) ? Ou les lions (p_e^L élevé) ?

On décide d'introduire dans le parc une nouvelle espèce d'animaux, la liozelle, qui mange des lions mais qui est mangée par des gazelles (sûrement une expérience du gouvernement qui a mal tournée...). Que va-t-il se passer ?

Remarque 27.0.1 *Peut-être que ce sujet est un peu trop proche du précédent pour les mettre tous les deux la même année.*
Encore une fois, on peut faire quelque chose déterministe (qui aura une solution) ou des simulations (qui bien fait devraient être très intéressantes).
Le principe est le même que précédemment, si les lions sont trop gourmands, font trop de petits, ou si les gazelles n'ont pas assez de naissances, les deux populations vont s'éteindre. En revanche, si les gazelles ont suffisamment d'enfants, les deux populations devraient vivre en coexistence.

28 Dames chinoises

Deux adversaires s'opposent dans un jeu simplifié de dames chinoises. Chacun possède quatre pions disposés comme sur la figure 7.

A	B			1	3
C	D			2	4

FIGURE 6 – Figure pour l'exercice 31

Chacun leur tour, les joueurs choisissent de sauter leur tour ou de jouer un pion, soit en l'avançant d'une case adjacente (gauche, droite, bas, haut), soit en sautant par dessus un pion (allié ou adverse) à condition que la case de derrière soit vide. Vous avez les lettres et votre adversaire les chiffres.
À la première partie, votre adversaire joue de la façon suivante : il commence par avancer le pion 1, puis le pion 2, le 3, le 4 et à nouveau le 1 et ainsi de suite. S'il n'y a pas de pion devant lui, il avance simplement. S'il y a un seul pion, il le saute. S'il y a deux pions, il joue le suivant et continue le cycle. Enfin, si tous les pions sont bloqués, il décide de ne pas jouer.
Proposer une stratégie optimale pour le battre.
À la deuxième partie, votre adversaire s'aperçoit qu'il est plus rentable de commencer son cycle par le pion 3. Pouvez-vous le battre ?
Que se passe-t-il si le joueur garde la même stratégie mais en choisissant au hasard, à chaque étape, le pion parmi les pions pouvant avancer ?
Existe-t-il une stratégie optimale en toute circonstance ? Une stratégie pire que toutes les autres ?
Que se passe-t-il si vous jouer à deux sur un vrai plateau de dames chinoises ? Et à six joueurs ? En supposant que chacun joue pour soi ? En supposant que les autres joueurs se liguent contre vous ?

29 Lever un crayon

Parmi les figures 8, on peut dessiner certaines en ne levant jamais le crayon, d'autres en levant une ou deux fois le crayon exactement.

Comment savoir, au premier regard, combien de fois sera-t-on obligé de lever le crayon pour reproduire une figure ?

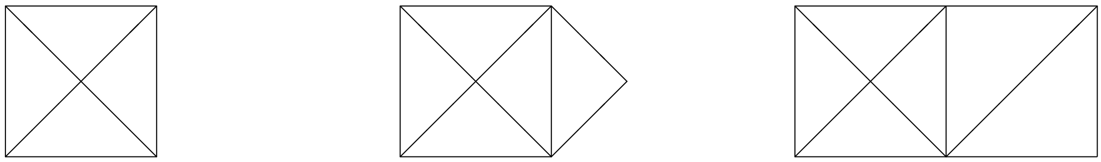


FIGURE 7 – Figure pour l'exercice 32

30 Une salade de pâtes

L'autre jour, monsieur Buittomi s'apprêtait à faire cuire des spaghettis lorsque l'un d'entre eux tomba par terre et se cassa en trois. Pendant la cuisson, il prit les trois morceaux et essaya de faire un triangle avec. Quelle est la probabilité que les trois morceaux se soient cassés de telle sorte qu'il puisse le faire ? Et si le spaghetti s'était cassé en quatre morceaux, quelle est la probabilité qu'il puisse faire encore un triangle ? Un quadrilatère quelconque ?
De même pour un nombre n quelconque de fractures.

31 Un nouvel opérateur

Monsieur et madame Johnson aiment bien créer de nouveaux opérateurs. Madame propose de créer un opérateur $\circ$ de telle sorte que pour tout entier a et b, nous ayons :

$$a \circ a = a + 2, \quad a \circ b = b \circ a \quad \text{et} \quad \frac{a \circ (a+b)}{a \circ b} = \frac{a+b}{b}.$$

Monsieur Johnson dit alors :
- Je pense que pour tout entier a et b, le nombre $a \circ b$ n'est pas forcément un entier.
- Je ne crois pas, répondit Madame, tu confonds avec la condition que $\frac{a \circ (a+b)}{a \circ b} = \frac{a+b}{a}$. En revanche, je pense qu'ils sont tous positifs.
- Je ne suis pas sûr de ça. Cela dépend du signe de a et de b.

Que pensez-vous de cette discussion ?
Êtes-vous capable de calculer la valeur de $a \circ b$ quelque soit les valeurs a et b qu'on vous donne ?

32 L'ivrogne (probabilité et programmation)

Le patron d'un bar new-yorkais jette dehors un homme ayant trop bu avant d'appeler le SAMU social. En admettant que les rues de New York sont perpendiculaires et infinies et en supposant que notre ivrogne se dirige vers une intersection voisine choisie aléatoirement par lui en une minute. Où le SAMU, qui arrive 30 minutes après, a-t-il le plus de chances de trouver l'ivrogne ? Comment optimiser la recherche des personnes du SAMU (suivant leurs nombres), d'abord en supposant qu'ils ne voient pas plus loin qu'une intersection puis sur toute la ligne ? Augmente-t-on les chances s'ils arrivent à communiquer entre eux ?
Que se passe-t-il si nous nous trouvons dans des rues plus chaotiques comme Paris ?

Remarque 32.0.1 *La partie programmation n'est pas obligatoire mais apporterait un grand plus. Si c'est un groupe n'ayant pas beaucoup de notions de programmation, je peux leur créer un programme pour visualiser des trajectoires de notre ivrogne et ainsi, ils pourront réfléchir à une stratégie à partir de là.*

33 Pandémie (probabilité et programmation)

Une maladie se répand dans le monde de la façon suivante. A chaque instant, nous avons dans l'ordre pour chaque malade :

1. Un malade peut contaminer chaque personne de son entourage avec probabilité p_C
2. Un malade peut guérir tout seul avec probabilité p_G
3. S'il n'est pas guéri, un malade peut mourir avec probabilité p_M

Suivant les différentes valeurs de p_C, p_G et p_M, que va-t-il se passer si les services publiques de santé ne font rien ?
Le gouvernement décide d'agir, il a deux possibilités :

1. Vacciner une partie de la population.
2. Isoler la population en petits groupes.

Suivant différents critères (coût, pertes humaines...), discuter de la qualité de ces méthodes.

Remarque 33.0.1 *La partie programmation n'est pas obligatoire mais apporterait un grand plus.*

34 Produit de nombres

Prenons un nombre entre 10 et 99 (par exemple 77) et multiplions les deux chiffres qui le compose ($7 \times 7 = 49$). Si nous avons encore un nombre entre 10 et 100, nous recommençons jusqu'à n'obtenir qu'un seul chiffre :

$$77 \to 49 \to 36 \to 18 \to 8. \tag{1}$$

Dans notre exemple, le chiffre 77 mène à 8, on dira alors que 77 est un *antécédent* de 8 et que 8 est la *finalité* de 77 (ici, 8 est également la finalité de 49, 36 et 18). Enfin, on parlera de *chaîne* pour parler de la suite de chiffres obtenue (comme dans le cas de l'équation (1)).

Est-on sûr que que chaque nombre possède une finalité ? Ou est-ce qu'une chaîne peut avoir des nombres qui sont toujours plus grands ? Ou alors, un nombre qui va créer un cycle (c'est-à-dire qu'à un moment, on retombe sur un chiffre déjà présent dans la chaîne) ? Est-ce que tous les chiffres possèdent un antécédent ? Est-ce qu'il y a des chiffres qui reviennent plus souvent que d'autres comme *finalité* ?

Peut-on avoir une idée de la *finalité* d'un nombre au premier coup d'oeil ? Par exemple, les nombres pairs (ou alors impair) sont-ils les antécédents des mêmes chiffres ? Quelles sont les conditions pour obtenir 5 comme finalité ?

Et peut-on généraliser les conclusions précédentes à tous les nombres plus grands que 100 ?

Remarque 34.0.1 *Il y a des chiffres évidents (comme s'il y a un 0, on a forcément 0).*

35 Mentaliste

Le jeu *The Mind* est un jeu coopératif possédant 100 cartes numérotées de 1 à 100 (chaque carte est unique). Au début de la première manche, les joueurs piochent chacun une carte et la regarde. Sans se parler ou faire de signes, les joueurs doivent poser les cartes par ordre croissant. Si l'un des joueurs pose une carte plus forte que son co-équipier avant ce dernier, l'équipe a perdu.

Par exemple, Agnès et Vincent jouent ensemble : Agnès tire la carte 25 et Vincent la carte 75. Si Agnès pose sa carte avant Vincent, ils gagnent. Si c'est le contraire, ils perdent.

Le but de cet exercice est de montrer, suivant le nombre de joueurs, que certaines configurations sont plus faciles que d'autres. Il faudrait aussi voir, suivant la carte que nous avons, quelles sont les chances pour que nous soyons le plus petit ou le plus grand.

Normalement, lorsque l'équipe gagne la première manche, les joueurs passent à la seconde où ils doivent chacun tirer deux cartes (puis trois pour la troisième manche)... Le jeu s'arrête à 12 manches pour 2 joueurs, 10 manches pour 3 joueurs et 8 manches pour 4 joueurs. Expliquez pourquoi cela devient trop facile lorsque nous tirons *trop de cartes.*

36 Magouille Académie

Magouille Académie est une émission de télé-réalité où s'affrontent 12 candidats $(A, B, \ldots, L)$. Chaque semaine, deux candidats sont mis en ballotage et les télé-spectateurs doivent voter pour l'un ou l'autre. La production s'est aperçue que les télé-spectateurs regardaient essentiellement pour le candidat A et aimerait que ce candidat reste jusqu'à la fin ; malheureusement, c'est également celui qui est en ballotage à chaque fois. Si on admet que les spectateurs ont une heure pour voter et qu'il y a un vote toutes les secondes, quelle est la probabilité que le candidat A reste jusqu'à la fin s'il est autant apprécié que ses concurrents ? S'il est préféré à ses concurrents ? Si, au contraire, le public a tendance à ne pas l'aimer ?

En fait, les votes ne s'arrêtent pas exactement au bout d'une heure car il y a toujours la pub. La production a la possibilité d'arrêter les votes à n'importe quel moment entre le début et la fin de la pub (si elle ne fait rien, les votes s'arrêtent d'office en même temps que la pub) et peut voir l'évolution en temps réel (même si elle n'a aucun poids dessus. Du coup, pour optimiser le rendement, la production va arrêter les votes dès que le candidat A va passer au dessus de son concurrent (on est quand même à *Magouille Académie*). Si la pub dure 5 minutes, est-ce que les chances que A gagne augmentent ? Si oui, quelle est la probabilité ? Et dans ce cas, est-ce que la production a intérêt d'augmenter au maximum le temps de la pub ?

37 Les nombres malheureux

2012 est un nombre heureux car il existe deux entiers strictement positifs dont la somme vaut 2012 et dont le produit est divisible par 2012. 13 en revanche est malheureux mais est-il tout seul ? Si oui, expliquez pourquoi et si non, trouvez une caractéristique des nombres malheureux.

Remarque 37.0.1 *Il y a pas mal de propriétés arithmétiques qui peuvent être obtenues.*

38 Agence de sécurité

Une agence de sécurité propose de sécuriser votre maison à base d'un faisceau qui déclencherait une alarme dès qu'il est coupé. Ce faisceau peut rebondir sur différents miroirs.
Sur l'exemple de la figure 9, on peut voir un seul faisceau parcourant les 7 pièces. Mais cela n'empêche pas le passage de la pièce 2 à la pièce 6 sans le couper. L'entreprise vous engage pour réfléchir sur les possibilités d'optimiser la sécurité à moindre coût. De nouveaux contrats pourront arriver avec différentes configurations pour les pièces.

39 Les mariages stables ou le casse-tête de parcoursup

Nous devons marier trois hommes (Alban, Bryan et Christophe) à trois femmes (Daenerys, Eléonore et Fanny). Pour cela, nous demandons à chacun et à chacune d'ordonner leurs choix et nous obtenons les préférences suivantes :

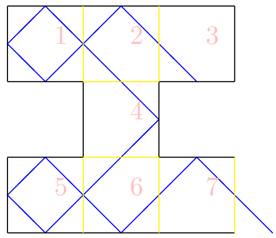


Figure 8 – Sécurité : les traits jaunes délimitent les pièces mais ne gênent pas pour passer.

Ordre	Alban	Bryan	Christophe	Daenerys	Eléonore	Fanny
Favori(e)	Eléonore	Daenerys	Daenerys	Alban	Bryan	Christophe
A la rigueur	Daenerys	Eléonore	Eléonore	Christophe	Alban	Alban
Pas vraiment	Fanny	Fanny	Fanny	Bryan	Christophe	Bryan

On dit que les mariages sont stables si des couples n'ont pas envie de divorcer pour se marier. Par exemple, si nous prenons les conditions suivantes :

Mariage Instable	Mariage stable
Alban ↔ Eléonore	Alban ↔Daenerys
Bryan ↔ Fanny	Bryan ↔Eléonore
Christophe ↔ Daenerys	Christophe ↔Fanny

Nous voyons que, dans la première configuration, Bryan et Eléonore vont avoir envie de rompre leurs mariages pour s'unir car Bryan préfère Eléonore à Fanny et Eléonore préfère Bryan à Alban. Dans la deuxième configuration, aucun mariage ne sera cassé car les femmes ont toujours eu leurs premiers choix (et n'auront pas de raisons de divorcer).

Sur cet exemple, on peut se demander combien il existe de configurations possibles et lesquelles sont stables ? Est-ce toujours la même chose quelque soit les voeux de chacun et de chacune ?

Dans un second temps, on peut réfléchir à des stratégies pour apparier les gens. La première consiste à répéter les étapes suivantes tant que nous n'avons pas tous les couples :

— Les hommes demandent à leurs premiers choix si elles veulent les épouser. Lorsque les femmes ont plusieurs prétendants, elles choisissent celui qu'elles préfèrent.
— Les hommes restants recommencent avec leurs deuxièmes choix (si la femme est déjà prise, elle répond non directement) et ainsi de suite.

Dans l'exemple précédent, sur quelles configurations de mariages arrive-t-on ? Est-elle stable ? Si on inverse les demandent (ce sont les femmes qui demandent aux hommes), est-ce qu'on obtient la même configuration ? Est-ce que certains n'auraient pas intérêt de tricher (c'est-à-dire de ne pas mettre leurs vrais voeux mais plutôt mettre un voeux moins important en premier pour être sûr d'avoir plutôt un second choix) ?

La deuxième stratégie, du *oui si*, est à peu près la même sauf que les femmes peuvent changer :

— Les hommes demandent à leurs premiers choix si elles veulent les épouser. Lorsque les femmes ont plusieurs prétendants, elles choisissent celui qu'elles préfèrent. Dans tous les cas et tant qu'elles ont des propositions, les femmes peuvent changer leurs choix.
— Les hommes restants recommencent avec leurs deuxièmes choix (et les femmes peuvent changer). Ainsi, des hommes qui avaient une femme à l'étape précédente peuvent ne plus en avoir à cette étape. Et on continue.

Est-ce que l'algorithme s'arrête ? On peut se poser les mêmes questions que pour l'algorithme précédent.

Une fois que vous aurez réfléchi à toutes ces questions, vous pouvez étendre vos réflexions à l'algorithme de Parcoursup qui est encore différent.

Remarque 39.0.1 *Pour les professeurs, l'idée m'est venue en regardant la vidéo* `https://www.youtube.com/watch?v=dO1pLi2Dedw`.

40 Propagation

Imaginons que nous avons un jardin de forme quelconque (par exemple, le jardin de la figure 3) décomposé en carrés avec une plante, que nous appellerons de son nom savant *propagatus extremus rapidus* ou simplement *propagatus*, qui occupe l'un de ces carrés (en vert sur la figure 3). Admettons que nous sommes au mois de janvier, si on ne fait rien, la *propagatus* va coloniser les carrés qui touchent son carré en février (sur la figure, elle remplit alors 5 carrés) et recommencer mars avec les carrés qui touchent ceux du mois de février (du coup 12 carrés car certains sont sur un bord du jardin) et ainsi de suite jusqu'à remplir tout le jardin.

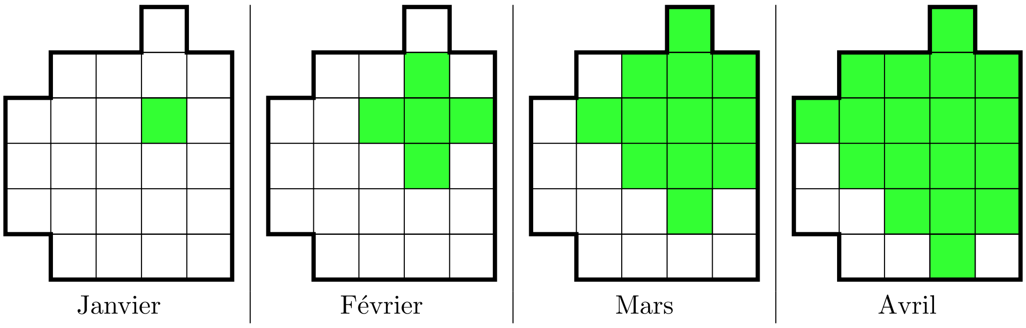


FIGURE 9 – Figure de l'exercice 9 montrant un exemple de propagation sur 4 mois : le trait épais noir représente les limites du jardin et le quadrillage les petits bouts de jardin que peut coloniser la plante *propagatus extremus rapidus*.

Dans l'exemple de la figure 3, à quel mois la plante aura-t-elle recouverte le jardin ? Cette plante est plutôt jolie et demande peu d'entretiens donc certains jardiniers aiment bien la cultiver. Dans l'exemple précédent, où faudrait-il planter le premier carré de plantes pour que le jardin soit recouvert le plus tôt possible ? Et si je commence avec deux carrés de plantes ?

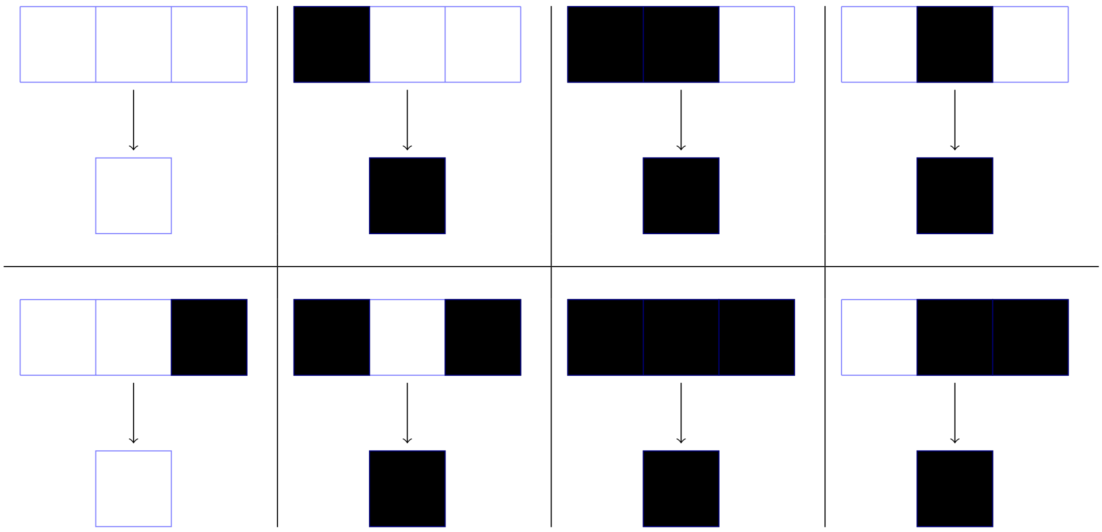
Un paysagiste cherche à proposer la forme optimale d'un jardin avec un nombre fixe de petits carrés pour que la plante puisse le remplir le plus vite possible ; pouvez-vous l'aider ? Á l'opposé, quelle serait la forme et l'emplacement de départ les moins pratiques pour la propagation de la plante ?

Mêmes questions avec un nombre de carrés de plantes au départ quelconque.

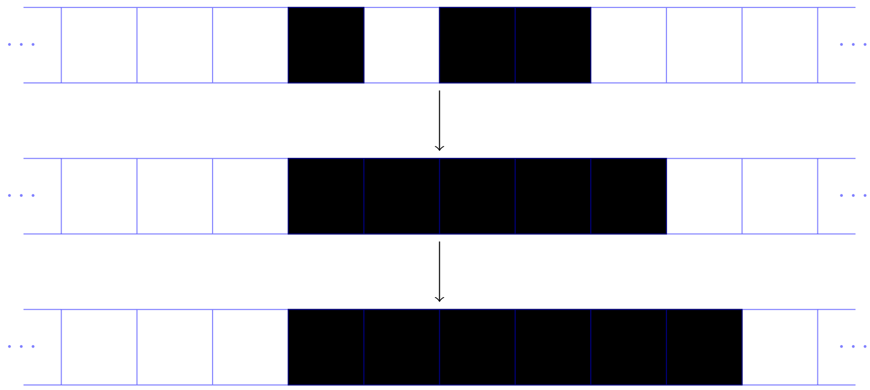
41 Automate cellulaire

Le principe d'un automate cellulaire est un système qui évolue avec des règles simples. Prenons par exemple le point de départ suivant :

et on se donne une règle d'évolution des couleurs des cases en fonctions de ses voisines :



Ainsi, l'évolution est la suivante :



et ainsi de suite. Si on enlève les flèches pour faire un dessin plus joli, on voit une pyramide coupée se former.
Partant de ce principe, combien existe-t-il de règles possibles ? Quelle(s) règle(s) vont faire que les carrés s'étendent d'un seul côté (comme dans l'exemple) ? Des deux côtés ? Quelle(s) règle(s) vont imposer que la forme ne va pas s'étendre ? Voir disparaître ? Peut-on avoir une idée du nombre de cases noires après 100 itérations si nous commençons avec une seule case noire au début ?

On pourra vérifier tous ces résultats par simulation et voir les motifs que cela crée.

Remarque 41.0.1 *Pour les professeurs, l'idée m'est venue en regardant la vidéo* `https://www.youtube.com/watch?v=S-WONX97DBO`*. En particulier, pour certaines règles, on a l'impression d'avoir des motifs aléatoires qui apparaissent.*