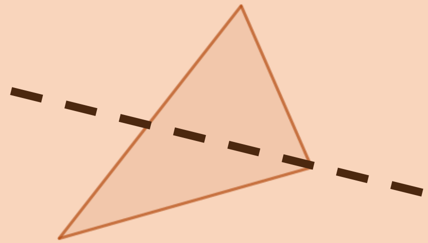
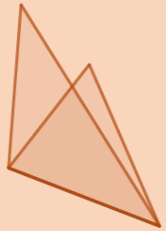
Comment plier un triangle pour obtenir une aire minimale de la figure obtenue ?

On plie un triangle en deux et on obtient un polygone.

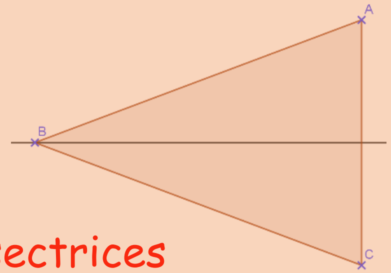




Comment plier de façon à ce que la partie non recouverte du polygone obtenu aie une aire minimale ?

Premières intuitions

L'aire restante est nulle si le triangle est isocèle



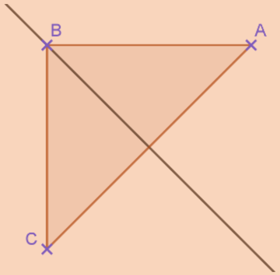
Nous nous sommes donc intéressés aux bissectrices

Pour un triangle quelconque, on a essayé avec :

➔ la bissectrice de l'angle le plus aigu du triangle

Problème : cela ne convenait pas dans tous les cas.

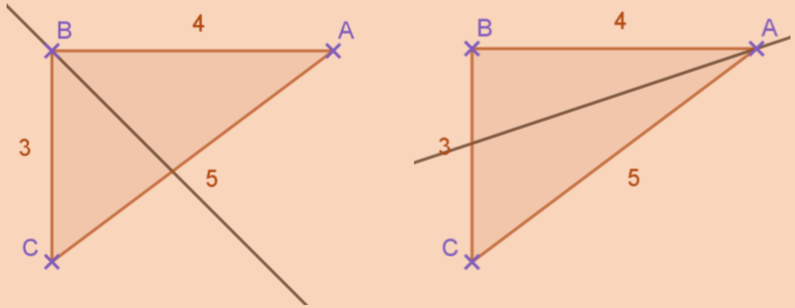
Contre-exemple :



➔ la bissectrice de l'angle formé par les deux côtés les plus proches en longueur

Problème : Cela semble convenir. Quelle bissectrice choisir, s'il y a le même écart entre deux côtés ?

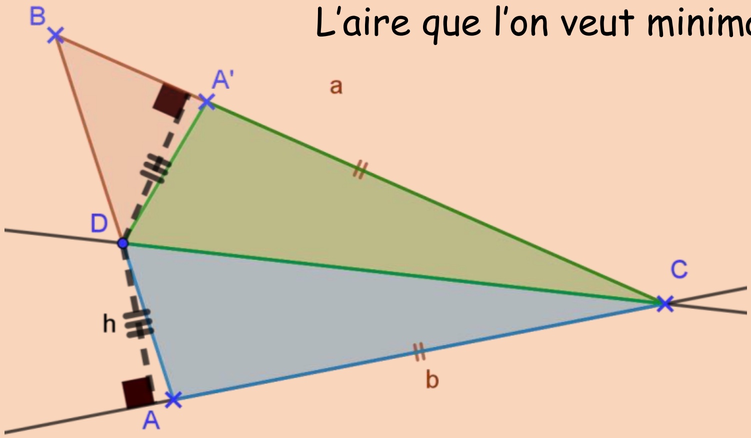
Par exemple :



Détermination de l'expression de l'aire restante

Soit ABC un triangle tel que AB = c, BC = a et AC = b avec **a ≥ b ≥ c.**

On considère la bissectrice comprise entre les longueurs a et b.



L'aire que l'on veut minimale est celle du triangle DBA' : $A_{DBA'} = \frac{(a-b)\times h}{2}$

Recherche de l'expression de h

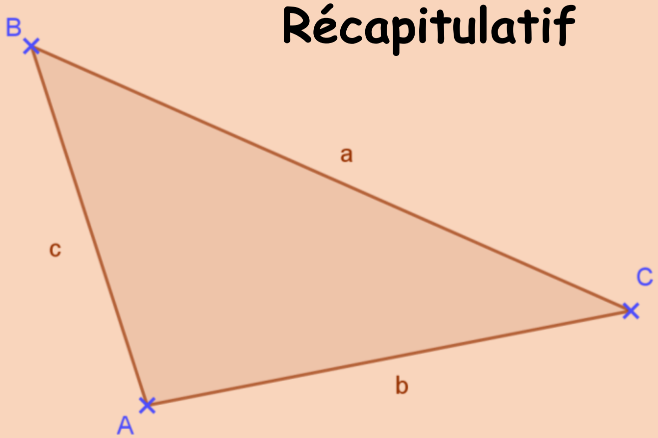
L'aire totale du triangle A_t $\quad A_t = A_{DAC} + A_{DBC}$

$$A_t = \frac{AC\times h}{2} + \frac{BC\times h}{2} = \frac{(a+b)\times h}{2}$$

$$h = \frac{2\times A_t}{a+b}$$

$$\boxed{\boldsymbol{A_{DBA'} = \frac{a-b}{a+b}\times A_t}}$$

Récapitulatif



- **Si on considère les longueurs a et b** $\boldsymbol{\frac{a-b}{a+b}\times A_t}$
- **Si on considère les longueurs a et c** $\boldsymbol{\frac{a-c}{a+c}\times A_t}$
- **Si on considère les longueurs b et c** $\boldsymbol{\frac{b-c}{b+c}\times A_t}$

Le calcul des coefficients permet donc de déterminer le choix de la bissectrice répondant à la problématique.

Choix de la bissectrice : recherche d'un critère simple

On désire donc comparer les coefficients : $\dfrac{a-b}{a+b}$; $\dfrac{b-c}{b+c}$ et $\dfrac{a-c}{a+c}$

$a \geq b \geq c$

Comparons $\dfrac{a-b}{a+b}$ et $\dfrac{a-c}{a+c}$:

$$\left.\begin{array}{l} a-c \geq a-b \\ a+b \geq a+c \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a-c}{a+c} \geq \frac{a-b}{a+c} \geq \frac{a-b}{a+b} \Rightarrow \frac{a-c}{a+c} \geq \frac{a-b}{a+b}$$

Comparons $\dfrac{a-c}{a+c}$ et $\dfrac{b-c}{b+c}$:

➔ On va s'intéresser au signe de la différence :

$$\frac{a-c}{a+c} - \frac{b-c}{b+c} = \frac{(a-c)(b+c)}{(a+c)(b+c)} - \frac{(b-c)(a+c)}{(b+c)(a+c)} = \frac{ab+ac-cb-c^2-ab-bc+ac+c^2}{(a+c)(b+c)}$$

$$\frac{a-c}{a+c} - \frac{b-c}{b+c} = \frac{2ac-2bc}{(a+c)(b+c)} = \frac{2c(a-b)}{(a+c)(b+c)} \geq \mathbf{0} \Rightarrow \frac{a-c}{a+c} \geq \frac{a-b}{a+b}$$

Récapitulatif

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{a-c}{a+c} \geq \dfrac{a-b}{a+b} \\ \dfrac{a-c}{a+c} \geq \dfrac{b-c}{b+c} \end{array}} \Rightarrow$$

On peut donc écarter la bissectrice mettant en jeu a et c, soit celle comprise entre la plus grande longueur et la plus petite longueur du triangle.

Comparons $\dfrac{a-b}{a+b}$ et $\dfrac{b-c}{b+c}$:

➔ On va s'intéresser au signe de la différence :

$$\frac{a-b}{a+b}-\frac{b-c}{b+c}=\frac{(a-b)(b+c)}{(a+b)(b+c)}-\frac{(b-c)(a+b)}{(b+c)(a+b)}=\frac{ab+ac-b^2-bc-ba-b^2+ca+cb}{(a+c)(a+b)}$$

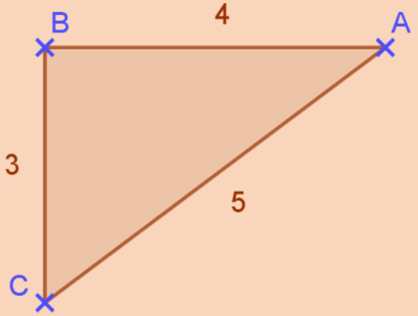
$$\frac{a-c}{a+c}-\frac{b-c}{b+c}=\frac{2ac-2b^2}{(a+c)(b+c)}=\frac{2(ac-b^2)}{(a+c)(b+c)}$$

➔ **du même signe que ac-b²**

Si $ac-b^2\geq 0$ ➔ **On choisira la bissectrice passant par le sommet commun des deux plus petites longueurs du triangle.**

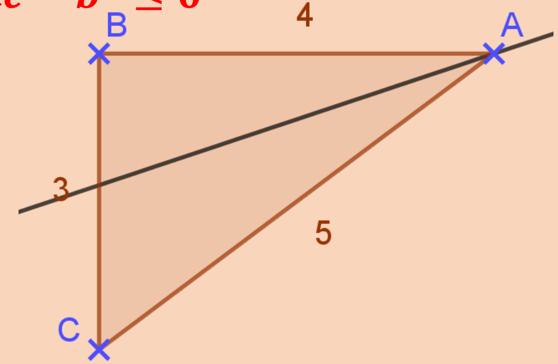
Si $ac-b^2\leq 0$ ➔ **On choisira la bissectrice passant par le sommet commun des deux plus grandes longueurs du triangle.**

Application



$$ac-b^2=5\times 3-4^2=15-16=-1$$

Donc $ac-b^2\leq 0$



On choisira la bissectrice passant par le sommet commun des deux plus grandes longueurs du triangle.

Sujet donné par Elise Goujard
Chercheuse à l'Institut
Mathématiques de Bordeaux

Responsable de l'atelier MEJ
DE PAOLA Ercole

Recherche réalisée par
Gobara Karim
Gonzalez Bertille
Larrat Agathe