La Balle aux prisonniers

2020-2021

Nom, prénom et niveaux des élèves : Pierre-Alexandre Paquet, Massil Ziane-Khodja, classe de 1ère

Établissement : Lycée Carnot, Paris

Enseignante : Ariane Martin (doctorante)

Chercheur/Chercheuse : Lucas Gerretsen, Ingénieur, Nintendo

Table des matières

Présentation du sujet

Trois joueurs participent à une balle aux prisonniers particulière. Ils tirent chacun à tour de rôle, selon un ordre défini au début de la partie, sur le joueur de leur choix. Ils peuvent également choisir de passer leur tour (ce qui pourrait être rentable dans certaines situations).

S'ils touchent, le joueur touché est éliminé. Le dernier en vie gagne la partie.

Grâce à des formules mathématiques, des programmes Python et des réflexions, nous essaierons de déterminer les meilleures stratégies pour gagner, ainsi que les probabilités de victoire qui en découlent.

1 Introduction

Trois joueurs Ahriman, Bob, et Coton, s'affrontent dans une variante chacun pour soi de la balle aux prisonniers où chaque joueur tire à tour de rôle.

Ce truel est organisé suivant différentes règles

- Chaque joueur a une probabilité de toucher son adversaire lors de son tir :
  - Ahriman : $\frac{1}{10}$
  - Bob : $\frac{1}{2}$
  - Coton : $\frac{1}{3}$
- Si un joueur est touché il est éliminé.
- Un joueur peut décider de tirer sur qui il veut ou de passer son tour.
- On suppose que les 3 joueurs connaissent la précision de chacun.
- Chaque joueur continuera de tirer à son tour tant que tous les autres joueurs n'ont pas été éliminé ou qu'il le soit.

1.1 Problématiques

Pour explorer ce sujet, nous nous fixons 4 problématiques.

- Quelles sont les stratégies de chaque joueur pour gagner ?
- Quelles sont les probabilités de victoire de chaque joueur ?
- Comment évolueront les probabilités de victoire des joueurs en fonction de l'ordre et de leurs précisions ?

1.2 Exemple

Pour illustrer le sujet nous allons voir un exemple simple de truel (Figure 1).

Nous prenons les trois joueurs, avec l'ordre (Ahriman —> Bob —> Coton) et leur précision respective $\left(\frac{1}{10}\right)$, $\left(\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{3}\right)$.

Ahriman commence. Il vise Bob. Il rate son tir (Figure 1a).

Comme il n'y a pas de joueur éliminé, l'ordre de passage reste le même : Ahriman —> Bob —> Coton

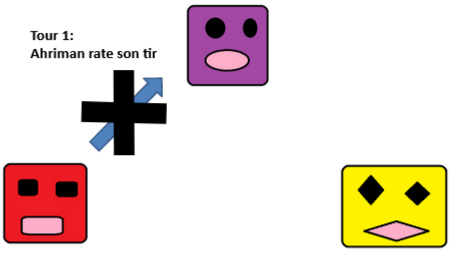
C'est donc au tour de Bob de tirer. Il vise Coton. Il touche (Figure 1b). Coton est donc éliminé.

Le nouvel ordre est donc Ahriman —> Bob

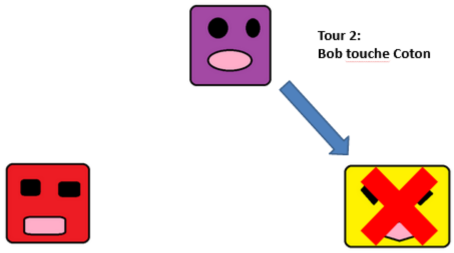
Comme Bob vient de tirer c'est au tour d'Ahriman. Ce dernier ne peut viser que Bob puisqu'il est son seul adversaire. Il le touche (Figure 1c). Bob est donc éliminé.

Ahriman étant le dernier joueur, il gagne la partie.

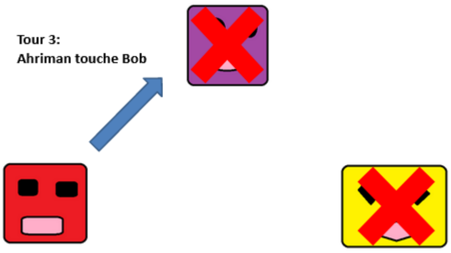
Cet exemple nous permet de mieux comprendre le sujet, et comment il fonctionne. Cependant, nous avons pour l'instant une situation parmi une infinité. Pour résoudre le sujet il nous faut un point de vue général. Nous allons donc représenter les truels avec des arbres de probabilités.



(a) Tour 1 : Ahriman vise Bob mais rate.



(b) Tour 2 : Bob tire sur Coton et réussi.



(c) Tour 3 : Ahriman tire sur Bob et réussi

(d) Ahriman gagne donc la partie

FIGURE 1 – Exemple simple de truel

1.3 Notations

Avant de réaliser l'arbre, nous définissons quelques notations. Soit :

— px la précision du joueur X (soit sa probabilité de toucher)
— P_{vx} la probabilité de victoire du joueur X
— X/Y le duel entre un joueur X et Y et où le joueur X commence
— $P_{X/Y}$ la probabilité que le duel X/Y se produise
— Xty Le joueur X tire sur le joueur Y
— Xp Le joueur X reste passif

2 Cas étudié

2.1 Arbre de probabilité en boucle

2.1.1 Problème de l'utilisation d'un arbre de probabilité classique

Comme dit précédemment, notre objectif est de créer un arbre de probabilité résumant toutes les situations possibles. Cependant il nous est rapidement apparu un problème : cet arbre est infini ! En effet comme les joueurs peuvent rater leur tir (intentionnellement ou non), ils peuvent rester en vie *ad vitam æternam* et donc continuer de tirer pour l'éternité. Or un arbre de probabilité modélise des situations définies et limitées donc nous ne pouvons pas l'utiliser.

Nous allons donc définir un outil mathématique : l'arbre en boucle.

2.1.2 Définition d'un arbre en boucle

Définition : Un arbre de probabilité en boucle, plus simplement appelé arbre en boucle est un schéma permettant de résumer une expérience aléatoire. À la différence d'un arbre de probabilité classique, dans certaines situations l'expérience peut se répéter à l'infini et l'arbre peut durer indéfiniment. Cela forme donc des boucles.

2.1.3 Modèle élémentaire

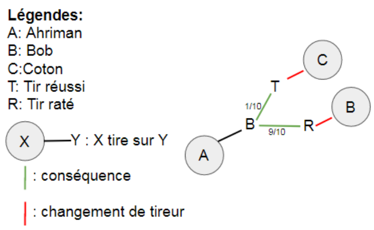


FIGURE 2 – Modèle élémentaire d'un arbre

Pour mieux comprendre la création, la légende et l'organisation de notre arbre en boucle, nous réalisons un modèle simple modélisant une situation simple, appelé modèle élémentaire (Figure 2), avant de le transformer par la suite en arbre en boucle. Ahriman, symbolisé par le rond gris avec le A, tire sur Bob, représenté par le B. Il y a deux conséquences possibles, chacune représentée par un trait vert.

La première est qu'Ahriman réussisse son tir (noté T pour "Touché"). Sa probabilité de réussite ($\frac{1}{10}$) est représentée à coté. Cela conduit à l'élimination de Bob et un changement de tireur, représenté par un trait rouge qui conduit lui même au prochain tireur. Celui ci est

Coton, représenté par le C dans le rond gris.

La seconde conséquence possible est qu'Ahriman rate son tir (noté R pour "Raté"). Sa probabilité de rater ($\frac{9}{10}$) est aussi représentée à coté. Cela conduit également à un changement de tireur, représenté par un trait rouge. Dans ce cas, le prochain joueur est Bob, représenté par un B dans un cercle gris. Lui même tirera et nous développerons l'arbre jusqu'à représenter toutes les situations possibles.

2.1.4 Modèle reprenant l'exemple

Nous tentons de réaliser un modèle plus complexe d'un arbre modélisant le sujet (Figure 3). Pour faciliter sa compréhension, nous utilisons la situation que nous avions prise en exemple (Section 1.2).

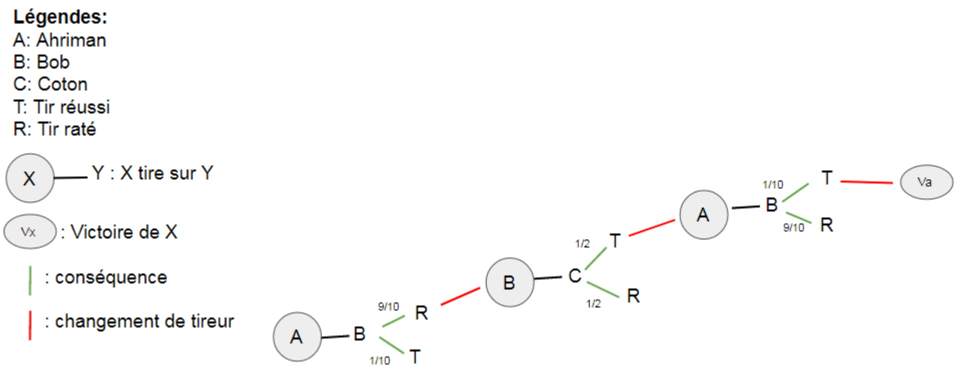


FIGURE 3 – Modèle de l'arbre reprenant l'exemple présenté au début de l'article

Ahriman tire sur Bob. Il y a deux conséquences possibles : tir réussi ou tir raté. Ici nous ne développons que la suite du tir raté. Comme aucun joueur n'a été éliminé, c'est au tour de Bob. Il tire sur Coton. Là aussi il y a deux conséquences possibles. Ici on ne représente que la suite du tir réussi. Cela a pour conséquence l'élimination de Coton. C'est donc au tour d'Ahriman qui n'a d'autres choix que de tirer sur Bob. Il y a toujours les deux conséquences, mais ici aussi on choisit le tir réussi. Ce qui correspond à une élimination de Bob et donc à une victoire d'Ahriman, représentée par l'ovale gris avec un Va.

2.1.5 Modèle introduisant les boucles et les choix ratés

Avant de réaliser l'arbre complet, il nous manque des notations pour représenter toutes les règles et situations possibles comme par exemple les joueurs qui choisissent de rater leur tir. De plus nous introduirons enfin les boucles ce qui transformera nos arbres de probabilité en arbres en boucle. Pour mieux les comprendre nous réalisons un autre arbre (Figure 4).

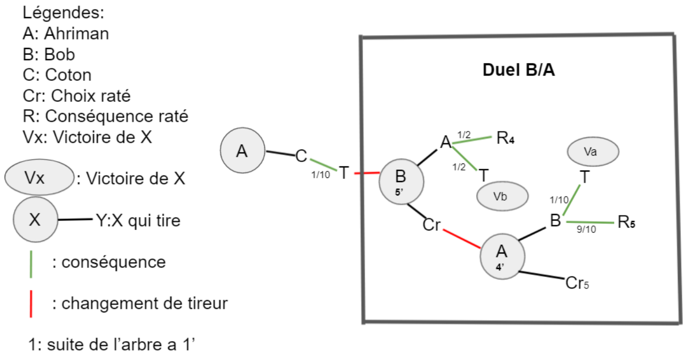


FIGURE 4 – Modèle introduisant les boucles et les choix ratés

Ahriman tire sur Coton et le touche. Cela conduit à un duel entre Ahriman et Bob représenté par un carré avec "duel B/A". Au début de ce duel, Bob a deux choix : tirer sur Ahriman ou choisir de rater son tir (noté C_r sur la Figure 4). S'il tire sur Ahriman il y a deux conséquences possibles : soit il le touche ce qui conduit à une victoire, soit il le rate (noté R_4 sur la Figure 4). Cela conduit à un changement de tireur dans les deux cas. Pour éviter de modéliser le duel A/B, situation déjà modélisée autre part sur l'arbre, nous créons un raccourci, en effet nous notons un petit "4" à côté du tir raté de Bob sur Ahriman (R_4) [1] . Cela signifie que l'arbre continue à coté du "4'", en dessous du joueur A. Cela renvoie à la représentation du duel A/B dans notre arbre. Ahriman a le choix de rater son tir ou de tirer sur Bob. Si Ahriman choisit de rater cela reconduit à la situation du duel B/A. S'il décide de tirer sur Bob, soit il est touché ce qui conduit à une victoire d'Ahriman, soit il est raté ce qui reconduit aussi au duel B/A.

Cette portion de l'arbre nous permet de voir la grande utilité de ces boucles.

2.1.6 Modèle complet

Maintenant que nous avons expliqué le concept des arbres à boucles, nous réalisons un modèle complet de l'arbre à boucle du truel, c'est à dire un arbre comprenant toutes les possibilités de tir et de passivité de tous les joueurs (Figure 5).

[2] C'est un arbre à l'aspect complexe mais qui est en fait assez simple à comprendre. On peut le séparer en 4 blocs (Figure 6) :
— le truel;
— les duels C/A et A/C;
— les duels B/A et A/B;

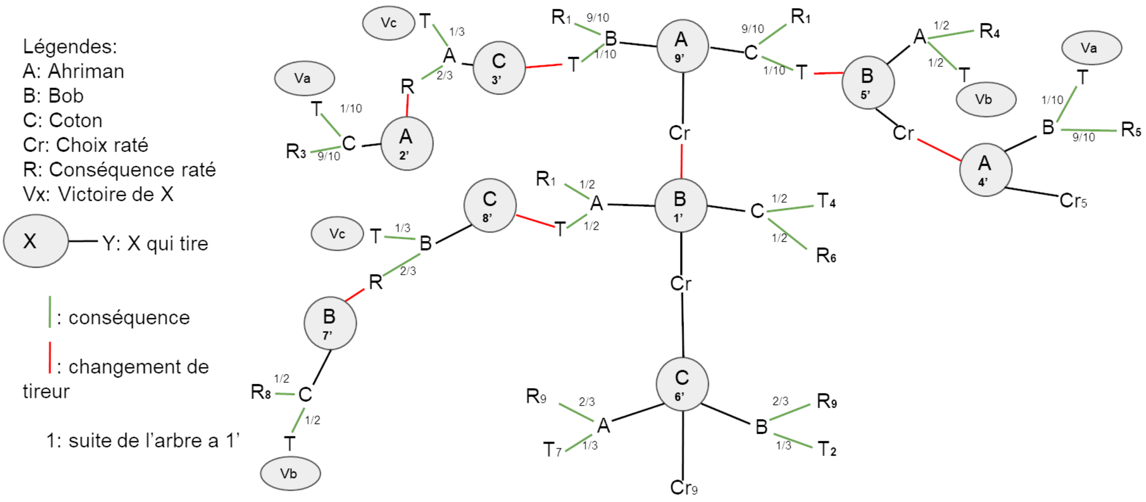


FIGURE 5 – Arbre Complet représentant le truel

— les duels C/B et B/C.

Grâce aux modèles précédents nous savons analyser un arbre : les tirs, les conséquences, les boucles,.. ce qui nous permet, avec cet arbre, de simuler n'importe qu'elle partie.

La partie du milieu de la Figure 6 représente le truel. Suite à un tir réussi, on change pour arriver dans un bloc duel. L'analyse des arbres nous permet de comprendre deux choses :

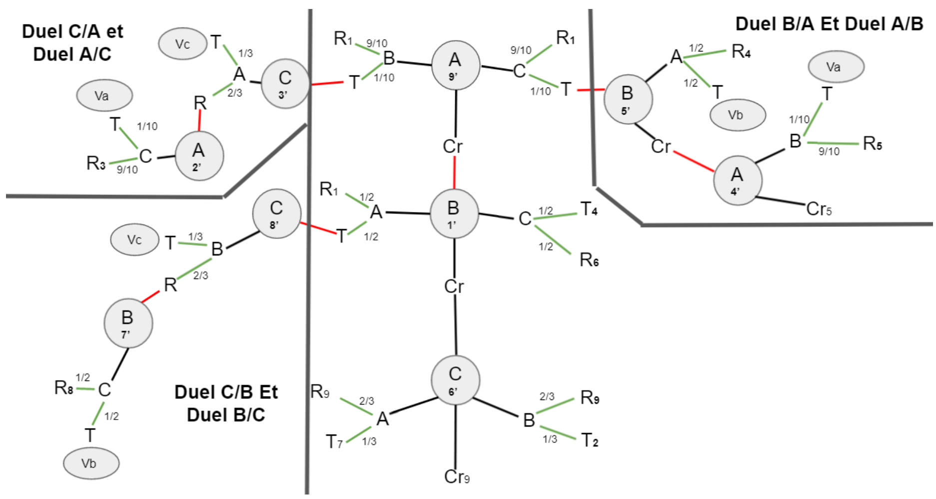


FIGURE 6 – Modèle complet faisant apparaître les duels

Premièrement il y a différentes stratégies possibles pour chaque joueur. Nous nous demandons quelles sont les plus efficaces pour gagner.

Deuxièmement, nous voyons qu'il y a de nombreuses boucles, parfois infinies. A cause de celles-ci, nous ne pouvons pas calculer les probabilités de victoire grâce à des formules de probabilités associées aux arbres de probabilités classiques.

Nous allons donc calculer les probabilités de victoire via des formules algébriques établies par nous-mêmes. Nous vérifierons ensuite ces résultats grâce à des programmes Python simulant un grand nombre de parties.

2.2 Stratégies de tir

2.2.1 Utilité des stratégies de tir

Pour calculer les meilleures probabilités de victoire de chaque joueur, il faut définir une stratégie optimale pour les joueurs, c'est à dire sur qui un joueur va tirer ou passer son tour pour que sa probabilité de victoire soit la plus grande possible. Afin de répondre à cette question, nous allons effectuer quelques hypothèses.

2.2.2 Hypothèses

Nous considérons qu'un joueur ne peut pas avoir une probabilité de victoire nulle. Ce qui implique qu'il y a toujours au moins 2 joueurs qui tirent. En effet :

— si aucun joueur ne tire alors rien ne se passe et la partie serait infinie

— si seulement un joueur tire alors le joueur visé par celui-ci aura donc une probabilité de victoire nulle ce qui est en contradiction avec nos conditions.

De plus nous partons aussi du principe que les joueurs ne changent pas de stratégies pendant le déroulement du truel et ne la changent qu'au moment du duel.

2.2.3 Choix de la stratégie de tir d'un joueur

Nous pouvons être amenés à penser qu'un joueur aurait soit intérêt à tirer sur le plus fort pour éliminer la personne ayant le plus de chance de l'éliminer en truel ou en duel. Soit intérêt à passer son tour pour pouvoir être le premier à tirer lors du duel, ce qui comporte cependant le risque de se faire éliminer avant le duel (risque qui n'existe pas pour un joueur quand aucun autre joueur ne lui tire dessus).

Il y aura ainsi pour chaque joueur un compromis à faire entre ces deux options.

Ainsi dans le cas étudié où $pb > pc > pa$ ($\frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{10}$), il y aurait pour chacun des joueurs les options suivantes :

— Arhiman : Tirer sur Bob (noté Atb) ou passer son tour (Ap)

— Bob : Tirer sur Coton (Btc) ou passer son tour (Bp)
— Coton : Tirer sur Bob (Ctb) ou passer son tour (Cp)

2.2.4 Stratégies envisageables

Cela nous amène donc à 4 stratégies envisageables :
— Atb, Btc, Ctb
— Ap, Btc, Ctb
— Atb, Bp, Ctb
— Atb, Btc, Cp

Cependant on peut constater que la stratégie Atb, Bp, Ctb n'est pas envisageable. En effet, les joueurs Ahriman et Coton tirent tous les deux sur Bob, alors que celui ci ne vise aucun joueur. Il est donc forcément le premier joueur éliminé et n'a donc aucune chance de gagner. Cette stratégie contredit donc nos conditions. Nous ne la prenons donc pas en compte.

Ce qui nous laisse donc trois stratégies envisageables dans le cas étudié :
— Atb, Btc, Ctb
— Ap, Btc, Ctb
— Atb, Btc, Cp

2.3 Probabilités de victoire

2.3.1 Probabilité de victoire dans un duel

Nous allons ainsi dans un premier temps étudier les probabilités de victoire des joueurs dans les duels puis ensuite dans les truels afin de pouvoir mieux déterminer les probabilités de victoire des joueurs sur l'ensemble de la partie. Dans un duel X/Y on a :

$$P_{vx} = px + (1 - px)(1 - py)P_{vx} \tag{1}$$

$$\iff \boxed{P_{vx}(X/Y) = \frac{px}{(1 - (1 - px)(1 - py))}} \tag{2}$$

$$P_{vy} = (1 - px)py + (1 - px)(1 - py)P_{vy}$$

$$\iff \boxed{P_{vy}(X/Y) = \frac{(1 - px)py}{(1 - (1 - px)(1 - py))}} \tag{3}$$

Dans l'équation (1) :

— px : correspond à la précision du joueur X, soit la probabilité qu'il touche directement le joueur Y mettant ainsi fin au duel.

— $(1 - px)(1 - py)$: correspond à la probabilité que les deux joueurs ratent successivement leur tir.

— P_{vx} : étant donné que les 2 joueurs ont raté leur tir, nous pouvons associer la situation à un retour au début du duel avec le même ordre et les mêmes précisions. Il s'agit ainsi de la même probabilité de victoire pour le joueur X.

En factorisant l'équation (1) on obtient l'équation (2) qui permet de calculer la probabilité de victoire d'un joueur lors d'un duel. La formule de probabilité de victoire du joueur Y (P_{vy}) soit l'équation (3) découle donc de cette même méthode.

Ainsi par analogie avec l'équation (3), dans le duel Y/X on a :

$$P_{vx}(Y/X) = \frac{(1 - py)px}{(1 - (1 - px)(1 - py))}$$

On constate donc sachant que :

$$0 \leq py \leq 1$$

Ainsi :

$$0 \leq (1 - py) \leq 1$$

On en déduit que :

$$(1 - py)px \leq px$$

On en conclut que :

$$P_{vx}(Y/X) \leq P_{vx}(X/Y)$$

Ainsi comme nous pouvons être intuitivement amenés à le penser, un joueur aura toujours plus de chances de gagner un duel s'il le commence.

2.3.2 Probabilité qu'un duel se produise

Maintenant que nous savons comment calculer la probabilité de victoire d'un joueur lors d'un duel il nous reste à déterminer les probabilités que ces duels se produisent.

par exemple dans la stratégies Atb, Btc, Ctb, il y a trois duels possibles :

— si Ahriman élimine Bob : duel C/A
— si Bob élimine Coton : duel A/B
— si Coton élimine Bob : duel A/C

Nous pouvons donc calculer la probabilité que le duel C/A se produise. Nous avons donc ici par exemple :

$$P_{C/A} = pa + (1-pa)(1-pb)(1-pc)P_{C/A} \tag{4}$$
$$\iff P_{C/A} = \frac{pa}{1-(1-pa)(1-pb)(1-pc))}$$

Dans l'équation (4) :
— pa : correspond à la précision d'Arhiman, soit que la probabilité que le joueur Arhiman touche directement le joueur Bob.
— $(1-pa)(1-pb)(1-pc)$: correspond à la probabilité que les 3 joueurs ratent successivement leur tir. Ce qui implique donc un retour à la situation initiale. La probabilité que le duel C/A se produise est donc la même qu'au début du truel.

En appliquant cette même méthode, nous obtenons les autres probabilités de duels :

$$P_{A/B} = \frac{(1-pa)pb}{(1-(1-pa)(1-pb)(1-pc))}$$

$$P_{A/C} = \frac{(1-pa)(1-pb)pc}{1-(1-pa)(1-pb)(1-pc))}$$

2.3.3 Probabilité de victoire dans le cas étudié

Ainsi en connaissant les probabilités d'apparition de chacun des différents duels et les probabilités de victoire des joueurs dans ces duels on obtient donc les probabilités de victoires des joueurs.

Prenons l'exemple Atb, Btc, Ctb, ici la probabilité de victoire du joueur A est :

Probabilité du duel C/A × Probabilité de victoire du joueur A dans le duel C/A + Probabilité du duel A/B × Probabilité de victoire du joueur A dans le duel A/B + Probabilité du duel

A/C × Probabilité de victoire du joueur A dans le duel A/C.

Ainsi les probabilités de victoire des 3 joueurs sont :

$$\begin{cases} P_{Va} = P_{C/A}P_{Va}(C/A) + P_{A/B}P_{Va}(A/B) + P_{A/C}P_{Va}(A/C) \\ P_{Vb} = P_{A/B}P_{Vb}(A/B) \\ P_{Vc} = P_{C/A}P_{Vc}(C/A) + P_{A/C}P_{Vc}(A/C) \end{cases}$$

En utilisant les probabilités que les duels se produisent et de victoires des différents joueurs dans ces duels (déterminées avec les méthodes des équations (2) et (4)), on en déduit :

$$P_{Va} = \frac{pa}{(1-(1-pa)(1-pb)(1-pc))}\left(\frac{(1-pc)pa+(1-pa)(1-pb)pc}{(1-(1-pa)(1-pc))} + \frac{(1-pa)pb}{(1-(1-pa)(1-pb))}\right)$$

$$P_{Vb} = \frac{((1-pa)pb)^2}{(1-(1-pa)(1-pb)(1-pc))(1-(1-pb)(1-pa))}$$

$$P_{Vc} = \frac{pc(pa+pc(1-pb)(1-pa)^2)}{(1-(1-pa)(1-pb)(1-pc))(1-(1-pa)(1-pc))}$$

En appliquant cette même méthode on obtient donc les probabilités de victoires des joueurs dans les stratégies Atb, Btc, Cp et Ap, Btc, Ctb.

2.3.4 Tableau de comparaison des probabilités de victoire

Ainsi en rentrant dans ces formules les précisions des joueurs dans le cas étudié c'est à dire :

$$pa = \frac{1}{10}\,;\ pb = \frac{1}{2}\,;\ pc = \frac{1}{3}$$

Nous avons pu réaliser le tableau de la Figure 7 nous montrant les probabilités de victoires des joueurs dans les différentes stratégies.

2.4 Stratégie optimale

A l'aide du tableau de la Figure 7 nous pouvons déterminer une stratégie optimale en fonction des joueurs, et donc maximisant leurs probabilités de victoire, qui va donc s'appliquer dans le cas étudié.

Comme Bob est obligé de tirer sur Coton, étant donné qu'il a la plus grande précision et qu'il est toujours visé par au moins un joueur (comme vu précédemment) seules les stratégies

	Pva	Pvb	Pvc
Atb,Btc,Ctb	**0,19**	**0,53**	**0,28**
Atb,Btc,Cp	**0,18**	**0,67**	**0,15**
Ap,Btc,Ctb	**0,20**	**0,61**	**0,19**

FIGURE 7 – Tableau des probabilités de victoires des joueurs dans le cas étudié

optimales en fonction de A et C sont prises en compte. Cependant Arhiman étant le premier à jouer, il pourra donc restreindre les choix possibles pour Coton en choisissant sa propre action. Nous pouvons constater dans le tableau 7 qu'Arhiman a toujours plus de chance de gagner un truel lorsqu'il est passif. Nous aurons donc Ap, Btc. Cependant dans cette configuration il ne reste qu'un choix possible pour Coton : tirer sur Bob. Cette stratégie n'est donc optimale que pour Ahriman et comme nous pouvons le constater cela n'assure pas au joueur Coton le maximum de chances de gagner.

Ainsi dans le cas étudié la stratégie optimale (ici en fonction d'Arhiman) qui va s'appliquer est donc :
Ap, Btc, Ctb.

Et nous obtenons les probabilités de victoires suivantes :

— $\boxed{P_{Va} = 0,20}$
— $\boxed{P_{Vb} = 0,61}$
— $\boxed{P_{Vc} = 0,19}$

2.5 Vérification des probabilités de victoire grâce a des programmes python

Grâce au formules algébriques établies précédemment, nous avons déterminé nos probabilités de victoires (Figure 7). Cependant pour vérifier nos résultat nous utilisons des programmes Python. Ainsi pour vérifier que les résultats obtenus à l'aide des simulations sur les programmes python sont cohérents avec les formules, nous pouvons utiliser un graphique montrant l'évolution des fréquences de victoire des différents joueurs en fonction du nombre de simulations. Cela permet donc de montrer la convergence avec les résultats obtenus par les formules.

Nous avons par exemple fait cela pour la stratégie Ap, Btc, Ctb dans le cas étudié où nous avions donc $pa = \frac{1}{10}$, $pb = \frac{1}{2}$, $pc = \frac{2}{3}$

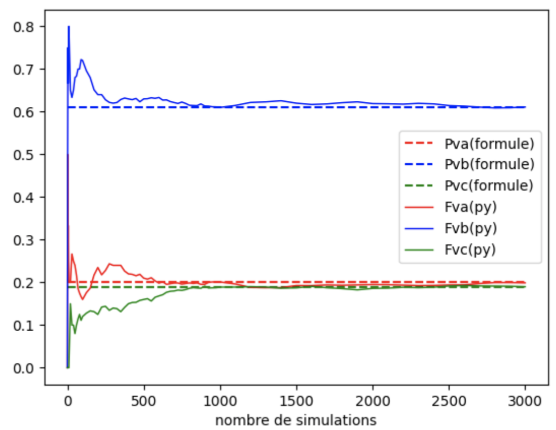


FIGURE 8 – Fréquence de victoires des différents joueurs en fonction du nombre de simulations par rapport aux probabilités attendues par les formules (Figure 7)

Ainsi sur la Figure 8 nous pouvons bien constater la convergence des fréquences obtenus par le programme python vers les probabilités attendues par les formules. Nous avons donc pour cet exemple les formules qui sont validées par les simulations.

3 Généralisation des truels

Nous pouvons ensuite généraliser la situation des truels avec des précisions inconnues pour un ordre donné (A/B/C).

3.1 Inégalité des précisions

3.1.1 Disjonction de cas

Nous pouvons ainsi dans les cas où les précisions ne sont pas égales distinguer 6 cas :
- $pa > pb > pc$
- $pa > pc > pb$
- $pb > pa > pc$
- $pb > pc > pa$
- $pc > pa > pb$
- $pc > pb > pa$

3.1.2 Stratégies envisageables

Ces 6 situations sont analogues au cas étudié précédemment ($pb > pc > pa$), nous pouvons donc dans chaque cas utiliser le même raisonnement que pour ce dernier cas pour déterminer les stratégies envisageables.

Ainsi pour tout truel avec 3 joueurs : X,Y,Z et $px > py > pz$, le joueur X est le plus fort et le joueur Y est le 2^e joueur. Le joueur X ayant la plus grande précision, il est donc toujours visé par un autre joueur (comme vu dans le cas étudié) il va donc forcément tirer sur le joueur Y. Les joueurs Y et Z ont ainsi eux le choix entre tirer sur le joueur X ou bien passer leur tour,ce qui donne donc 3 stratégies envisageables :

— Xty, Ytx, Ztx
— Xty, Yp, Ztx
— Xty, Ytx, Zp

Ainsi par exemple dans le cas $pa > pb > pc$ nous avons 3 stratégies envisageables :

— Atb, Bta, Cta
— Atb, Bp, Cta
— Atb, Bta, Cp

Nous appliquons ainsi cette même méthode pour les cinq autres cas d'inégalités où l'on retrouve donc trois stratégies envisageables à chaque fois.

3.1.3 Probabilité de victoires

Ainsi en appliquant toujours la même méthode que le cas étudié précédemment nous avons pu déterminer, pour chacune des trois stratégies envisageables des six cas d'inégalités, des formules de probabilité de victoires. Par exemple pour le cas $pa > pb > pc$, nous avons pour Atb, Bta, Cta :

$$P_{Va} = \frac{(1-pc)pa^2}{(1-(1-pa)(1-pb)(1-pc))(1-(1-pa)(1-pc))}$$

$$P_{Vb} = \frac{pb(1-pa)((1-pc)pb+(1-pb)pc)}{(1-(1-pa)(1-pb)(1-pc))(1-(1-pb)(1-pc))}$$

$$P_{Vc} = \frac{pc}{(1-(1-pa)(1-pb)(1-pc))}\left(\frac{pa}{(1-(1-pc)(1-pa))}+\frac{(1-pa)(pb+(1-pb)^2pc)}{(1-(1-pc)(1-pb))}\right)$$

Nous pouvons donc toujours appliquer cette même méthode pour déterminer les formules de probabilité de victoire des joueurs dans les autres stratégies qui appartiennent à ce cas (les stratégies Atb, Bp, Cta et Atb, Bta, Cp).

Enfin pour tout truel avec des précisions données nous pouvons déterminer le cas auquel appartient ce truel et en comparant les probabilités de victoires de chaque joueur dans chacune des stratégies comme fait précédemment avec le cas étudié permettant enfin de pouvoir éventuellement déterminer une stratégie optimale.

3.2 Égalité à 2 joueurs

3.2.1 Disjonction de cas

Pour les cas où 2 joueurs ont la même précision il est possible là encore de distinguer 2 catégories.

— Lorsque 2 joueurs ont une précision égale et que celle-ci est inférieure à celle de l'autre joueur :
  — $px = py < pz$

— Lorsque 2 joueurs ont une précision égale et que celle-ci est supérieure à celle de l'autre joueur :
  — $px = py > pz$

3.2.2 Stratégies envisageables

Pour les cas appartenant à la 1^{ere} catégorie, par exemple dans le cas où on aurait $px = py < pz$, les deux joueurs ayant la même précision (ici X et Y) vont donc voir le joueur Z comme plus dangereux étant donnée sa plus grande précision et vont donc tirer sur lui. Le joueur Z devra donc tirer sur quelqu'un pour ne pas avoir une probabilité de victoire nulle. Cependant il n'a pas plus d'intérêt à tirer sur Y ou X comme ils ont la même précision. Ainsi pour ces cas particuliers nous avons donc considéré que le joueur déciderait aléatoirement de tirer soit sur un joueur ou sur l'autre avec une probabilité de $\frac{1}{2}$ pour chacune des options. Ce qui donne donc dans chacun des trois cas appartenant à la 1^{ere} catégorie deux stratégie équiprobables, c'est à dire qu'elles ont la même probabilité d'arriver.

— $pa = pb < pc$:
  Atc, Btc, Ct(a ou b)

— $pa = pc < pb$:
  Atb, Bt(a ou c), Ctb

— $pb = pc < pa$:
  At(b ou c), Bta, Cta

Pour les cas appartenant à la 2^e catégorie où on aurait par exemple $px = py > pz$ les 2 joueurs (X et Y) ayant la plus grande précision vont donc ici se viser mutuellement.

L'autre joueur (Z) qui a la précision la plus faible n'est donc visé par aucun joueur et il est ainsi assuré d'arriver en duel et peut donc ici décider de viser un des 2 autres joueurs ou passer son tour.
Cependant s'il passe son tour il est aussi assuré de commencer le duel en premier et donc d'avoir plus de chance de le gagner. Ainsi le joueur va donc passer son tour.

Ce qui donne donc dans chacun des trois cas appartenant a la 2^e catégorie une stratégie qui s'applique :

— $pa = pb > pc$:
Atb, Bta, Cp

— $pa = pc > pb$:
Atc, Bp, Cta

— $pb = pc > pa$:
Ap, Btc, Ctb

3.2.3 Probabilité de victoires

Ainsi en ayant déduit une stratégie qui s'applique dans chacun de ces cas nous pouvons donc déterminer des formules nous donnant les probabilités de victoires des joueurs.

Pour les cas appartenant à la 1$^{\text{ère}}$ catégorie on en déduit par exemple pour $pa = pb < pc$ les formules suivantes [3] :

$$P_{Va} = \frac{pa((1-pb)pa + (1-pa)pb)}{(1-(1-pa)(1-pb)(1-pc))(1-(1-pa)(1-pb))}$$

$$P_{Vb} = \frac{pb}{(1-(1-pa)(1-pb)(1-pc))}\left(\frac{pa + pb(1-pa)^2}{(1-(1-pa)(1-pb))} + \frac{(1-pa)(1-pb)pc}{(1-(1-pb)(1-pc))}\right)$$

$$P_{Vc} = \frac{(1-pa)(1-pb)^2pc^2}{(1-(1-pa)(1-pb)(1-pc))(1-(1-pb)(1-pc))}$$

On applique ainsi la même méthode pour les autres cas de la 1$^{\text{ère}}$ catégorie ($pa = pc < pb$ et $pb = pc < pa$).

Pour les cas appartenant à la 2ème catégorie on en déduit par exemple pour $pa = pb > pc$ les formules suivantes :

$$P_{Va} = \frac{(1-pc)pa^2}{(1-(1-pa)(1-pb))(1-(1-pa)(1-pc))}$$

Sachant que $pa = pb$ on a donc :

$$P_{Va} = \frac{pa^2(1-pc)}{(1-(1-pa)^2))(1-(1-pc)(1-pa))}$$

Ainsi a on donc :

$$P_{Vb} = \frac{pa^2(1-pa)(1-pc)}{(1-(1-pa)^2))(1-(1-pc)(1-pa))}$$

$$P_{Vc} = \frac{pa^2(2-pa)}{(1-(1-pa)^2)(1-(1-pc)(1-pa))}$$

Nous pouvons ainsi appliquer la même méthode pour les autres cas de la 2ème catégorie ($pa = pc > pb$ et $pb = pc > pa$).

3.3 Égalité a 3 joueurs

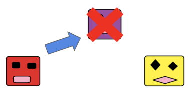
Dans le cas d'une égalité à 3 joueurs tous les joueurs ont la même précision (que nous allons noter p) il n'y a donc pas de joueur plus fort qu'un autre.
Les joueurs devront donc prendre en compte d'autres critères tels que l'ordre des joueurs ou alors s'imposer de nouvelles règles ou contraintes.

3.3.1 Cas particulier

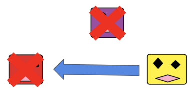
Nous avons tout d'abord identifié des cas particuliers :

— $p = 0$:
Lorsque tous les joueurs ont une précision nulle alors aucun joueur n'est touché. Le duel n'a donc jamais lieu est la partie reste "bloquée".

— $p = 1$:
Lorsque tous les joueurs ont une précision de 1 alors le premier joueur à tirer touchera forcement sa cible ; cependant lors du duel ça sera d'abord au tour de l'autre joueur, qui n'a pas été visé, de tirer et il éliminera donc forcement le premier joueur.
Ainsi si un joueur décide de tirer en premier il perdra forcement la partie, les joueurs n'ont donc aucun intérêt à tirer en premier et la partie restera donc « bloquée »ce que l'on peut constater dans le schéma 9.



(a) A elimine B



(b) C elimine B

FIGURE 9 – Exemple où chaque joueur à une précision de 1

3.3.2 Dans les autre cas ($0 < p < 1$)

Pour les autres valeurs de p qui ne constituent pas des cas particuliers, nous allons ainsi considérer que les joueurs vont choisir leur stratégie tour à tour en fonction de l'ordre de tir. Les stratégies ne sont ainsi plus déterminées avant que la partie commence. Comme précédemment, nous considérons que les joueurs ne changent pas de stratégie avant le début du duel. Chaque joueur ayant 3 choix (tirer sur les 2 autres joueurs ou bien passer leur tour) nous avons donc choisi de réaliser un "arbre" (voir figure 10) afin de pouvoir mieux visualiser la situation et les différentes stratégies possibles et donc de pouvoir plus facilement déterminer les choix optimaux des joueurs et donc une stratégie qui s'appliquerait. Dans cet arbre, chaque embranchement au niveau d'un joueur correspond à un choix de celui-ci :

Le choix des joueurs va ainsi dépendre notamment de celui des autres joueurs. Les joueurs vont donc devoir essayer de prédire le comportement des joueurs passant après eux. Ainsi pour connaître le comportement d'un joueur, nous devons prédire celui des joueurs après lui.

Nous allons donc étudier et déterminer les choix optimaux des joueurs en commençant par le dernier joueur.

Pour rappel : Un joueur a plus de chances de gagner un duel s'il le commence. Ainsi si un joueur ne risque pas de se faire éliminer par un autre joueur avant le duel il préférera donc

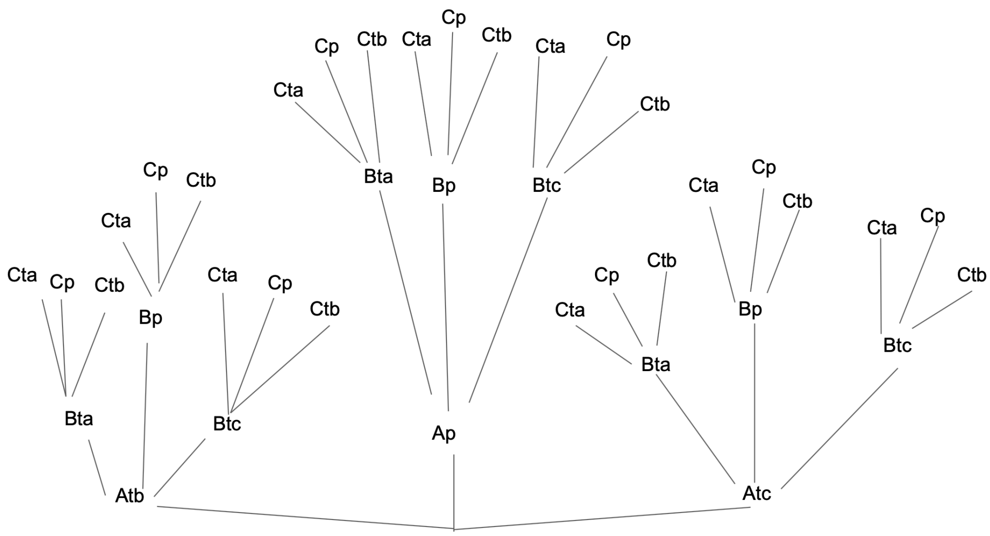


FIGURE 10 – arbre des stratégies

rester passif pour pouvoir être sûr de commencer le duel.

Nous allons donc dans un premier temps considérer que le joueur A va tirer sur le joueur B et donc déterminer la stratégie qui en découlerait en étudiant donc les choix du joueur C puis du joueur B.

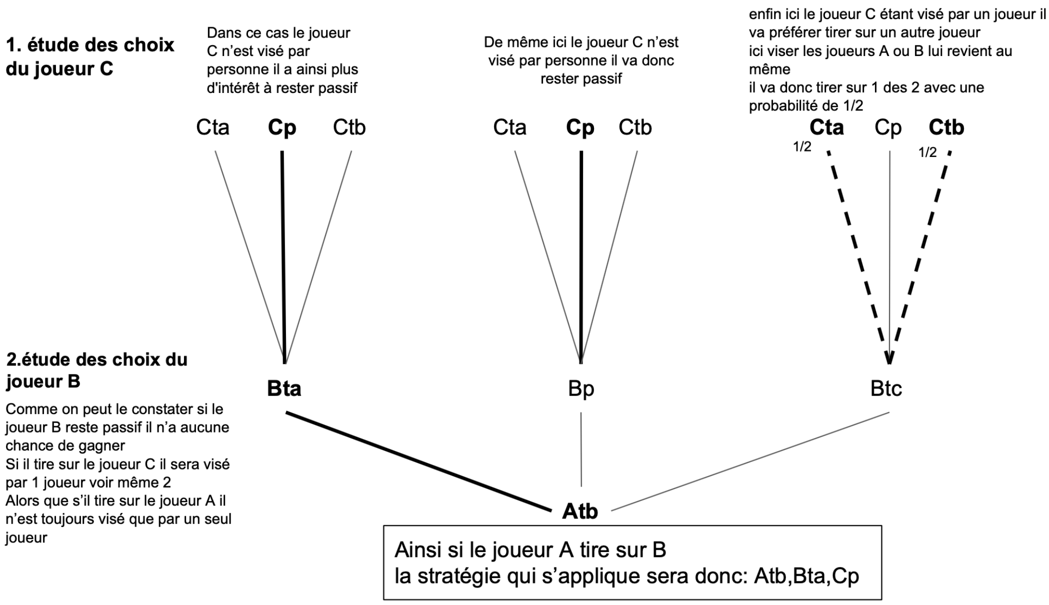


FIGURE 11 – Le joueur A tire sur le joueur B

On peut donc constater que si le joueur A décide de tirer sur le joueur B alors la stratégie qui s'appliquerait serait : Atb, Bta, Cp.

Nous allons dans un second temps déterminer la stratégie qui s'appliquerait si l'on considère que le joueur A va rester passif :

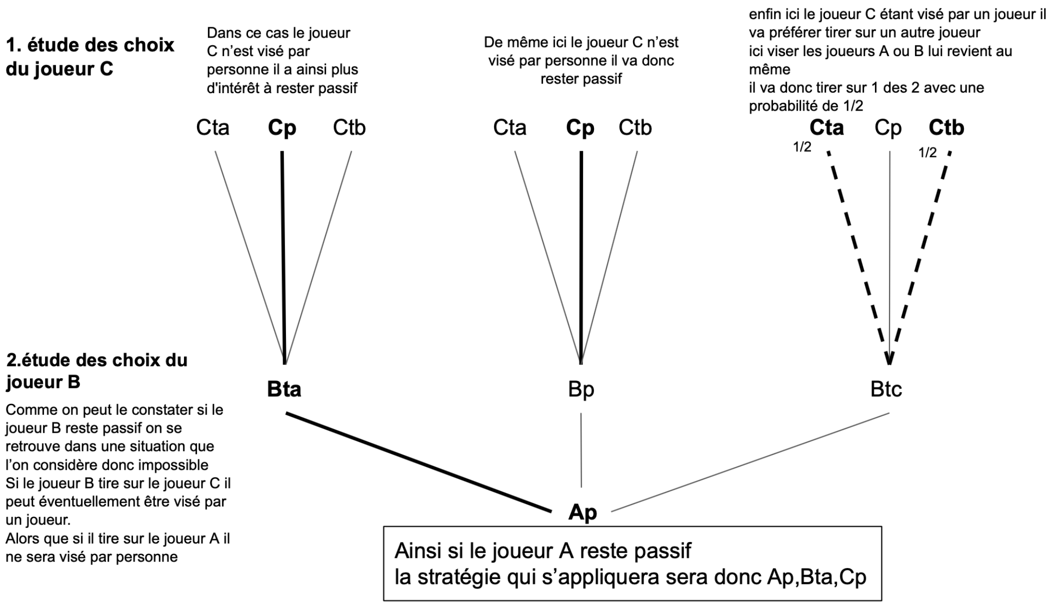


FIGURE 12 – Le joueur A reste passif

On peut donc constater que si le joueur A reste passif alors la stratégie qui s'appliquerait serait : Ap, Bta, Cp.

Nous allons enfin analyser la partie de l'arbre correspondant aux choix du joueur A de tirer sur le joueur C :

Pour pouvoir déterminer le choix du joueur B, nous devons donc avoir recours à des calculs. Le joueur B va ainsi :

- soit tirer sur un joueur et étant donné que, pour le joueur B, éliminer le joueur A ou le joueur C revient au même, il va donc tirer sur l'un des deux avec une probabilité de $\frac{1}{2}$ (stratégie Atc, Bt(a ou c), Ct(a ou b)).

- ou bien alors rester passif (stratégies Atc, Bp, Ct(a ou b)).

En utilisant la même méthode que celle détaillée dans la partie 3.1.3, nous avons donc déterminé des formules nous permettant de connaître la probabilités de victoire du joueur B pour chacun de ses 2 choix :

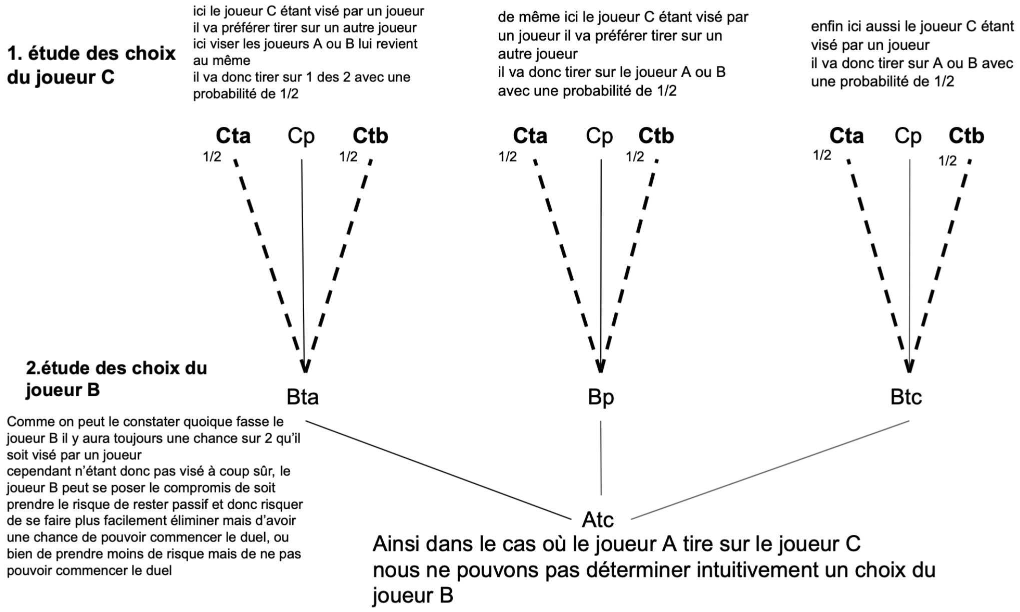


FIGURE 13 – Le joueur A tire sur le joueur C

— si le joueur B tire aléatoirement sur le joueur A ou le joueur C :

$$P_{Vb} = \frac{p^2(2+3(1-p)^2)}{2(1-(1-p)^3)(1-(1-p)^2))} \text{ [4]} \tag{5}$$

— si le joueur B reste passif :

$$P_{Vb} = \frac{p^2(3-p)}{2(1-(1-p)^2)^2} \tag{6}$$

Et nous avons donc en comparant la probabilité de victoire du joueur B pour chacune de ces formules pu déduire que son choix dépend de la valeur de p :

— si $p \in \left]0; 1-\sqrt{\frac{1}{2}}\right[$:
Alors le joueur B a une plus grande chance de victoire s'il tire
on a alors 4 stratégies équiprobables Atc, Bt(a ou c), Ct(a ou b) ;

— si $p \in \left]1-\sqrt{\frac{1}{2}}; 1\right[$:
alors le joueur B a une plus grande chance de victoire s'il reste passif
on a alors 2 stratégies équiprobables Atc, Bp, Ct(a ou b).

Ce que l'on va donc montrer ici.

Nous pouvons donc pour comparer la probabilité de victoire du joueur B s'il reste passif ou bien s'il tire aléatoirement sur le joueur A ou C, nous intéresser à la différence entre la formule (6) où le joueur B reste passif et la formule (5) où le joueur B tire aléatoirement sur le joueur A ou C ce qui nous donne donc :

avec $p \in]0;1[$

$$\boxed{\frac{p^2(3-p)}{2(1-(1-p)^2)^2} - \frac{p^2(2+3(1-p)^2)}{2(1-(1-p)^3)(1-(1-p)^2))}} \tag{7}$$

Et donc étudier le signe de l'expression (7). Ainsi lorsque celle-ci :

- est inférieure à 0 (donc l'expression (5) est supérieure à l'expression (6)) :
  Le joueur B a plus d'intérêt à tirer aléatoirement sur le joueur A ou C.

- est égale à 0 (donc l'expression (5) est égale à l'expression (6)) :
  Le joueur B a autant d'intérêt à tirer aléatoirement sur le joueur A ou C qu'à rester passif.

- est supérieur à 0 (donc l'expression (6) est supérieur à l'expression (5)) :
  Le joueur B a plus d'intérêt à rester passif qu'à tirer aléatoirement sur le joueur A ou C.

Nous pouvons donc dans un premier temps essayer de simplifier l'expression (7) notamment en la factorisant ou en la développant ainsi qu'en réduisant l'étude de signe à une partie de cette expression qui est celle qui va réellement décider du signe de tout le reste. Nous allons ainsi dans un premier temps la factoriser :

(Pour simplifier les explications nous noterons par la suite l'expression (7) comme $P_{Vb}(p) - P_{Vb}(t)$)

$$\frac{p^2(3-p)}{2(1-(1-p)^2)^2} - \frac{p^2(2+3(1-p)^2)}{2(1-(1-p)^3)(1-(1-(1-p)^2))} = \frac{p^2}{2(1-(1-p)^2)}\left(\frac{3-p}{(1-(1-p)^2)} - \frac{2+3(1-p)^2}{(1-(1-p)^3)}\right)$$

$$\iff P_{Vb}(p) - P_{Vb}(t) = \frac{p^2}{2(1-(1-p)^2)}\left(\frac{(3-p)(1-(1-p)^3) - (2+3(1-p)^2)(1-(1-p)^2)}{(1-(1-p)^3)(1-(1-p)^2)}\right)$$

$$\iff P_{Vb}(p) - P_{Vb}(t) = \frac{p^2}{2(1-(1-p)^2)^2(1-(1-p)^3)}\left((3-p)(1-(1-p)^3) - (2+3(1-p)^2)(1-(1-p)^2)\right) \tag{8}$$

On peut ainsi constater dans l'égalité (8) que les expressions $(1-(1-p)^2)^2$ et p^2 étant des carrés et comme $p \in]0;1[$ que :

$$\frac{p^2}{(1-(1-p)^2)^2} > 0$$

De plus sachant que :

$$p \in]0;1[$$

On en deduit que :

$$1-p \in]0;1[$$

Donc que :

$$(1-p)^3 \in]0;1[$$

Ainsi :

$$(1-(1-p)^3) \in]0;1[$$

Enfin cela signifie donc que :

$$\frac{p^2}{2(1-(1-p)^2)^2(1-(1-p)^3)} > 0$$

Ainsi on en déduit donc que le signe de l'expression (7) dépend du signe de :

$$(3-p)(1-(1-p)^3)-(2+3(1-p)^2)(1-(1-p)^2) \tag{9}$$

Nous allons ensuite continuer à développer et factoriser cette expression que l'on notera par la suite $E9$:

$$\begin{aligned}
&E9 = (3-p)(1-(1-p)^2(1-p)) - (2+3(1-2p+p^2))(1-(1-2p+p^2)) \\
&\iff E9 = (3-p)(1-(1-2p+p^2))(1-p) - (2+(3-6p+3p^2))(1-1+2p-p^2) \\
&\iff E9 = (3-p)(1-(1-2p+p^2-p+2p^2-p^3)) - (5-6p+3p^2)(2p-p^2) \\
&\iff E9 = (3-p)(1-1+2p-p^2+p-2p^2+p^3) - (5-6p+3p^2)(2p-p^2) \\
&\iff E9 = (3-p)(3p-3p^2+p^3) - (5-6p+3p^2)(2p-p^2) \\
&\iff E9 = p(3-p)(3-3p+p^2) - p(5-6p+3p^2)(2-p) \\
&\iff E9 = p\big((3-p)(3-3p+p^2) - (5-6p+3p^2)(2-p)\big)
\end{aligned}$$

Sachant que $p > 0$
On en déduit que le signe de l'expression (9) et donc de l'expression (7) dépend du signe de :

$$(3-p)(3-3p+p^2)-(5-6p+3p^2)(2-p) \tag{10}$$

Nous allons donc ensuite développer cette expression que l'on notera par la suite $E11$:

$$E11 = (9-9p+3p^2-3p+3p^2-p^3)-(10-12p+6p^2-5p+6p^2-3p^3)$$

$$\Longleftrightarrow E11 = (-p^3+6p^2-12p+9)-(-3p^3+12p^2-17p+10)$$

$$\Longleftrightarrow E11 = 2p^3-6p^2+5p-1$$

Enfin on en déduit donc qu'étudier le signe de l'expression (10) soit de l'expression (7) revient à étudier le signe de :

$$\boxed{2p^3-6p^2+5p-1} \tag{11}$$

Expression (11) qui est donc un polynôme du $3^{\text{ème}}$ degré et dont on va étudier le signe notamment en cherchant si il existe des valeurs de p où l'expression (11) est nulle.
Ce qui revient donc à résoudre l'équation :

$$2p^3-6p^2+5p-1=0 \tag{12}$$

Nous pouvons ainsi tout d'abord constater que cette équation possède une solution évidente en 1.
En effet :

$$2\times 1^3-6\times 1^2+5\times 1-1=2-6+5-1=0$$

Solution que nous allons noter p' et ainsi on a donc $\boxed{\text{p'=1}}$
De plus on en déduit ainsi que l'expression (11) peut se factoriser en $(p-1)$:

$$(p-1)A \tag{13}$$

L'expression (13) où A est donc un polynôme du second degré pour lequel on va donc aussi chercher des valeurs de p où celui-ci est nul (ce qui revient donc aussi par la même occasion à trouver d'autres éventuelles solutions de l'équation 12).
Nous devons donc tout d'abord déterminer une expression de A.
Sachant que A est un polynôme du second degré on peut donc l'écrire sous la forme :

$$ap^2+bp+c$$

avec :

$$a\in\mathbb{R}^\star$$

$$b\in\mathbb{R}$$

$$c\in\mathbb{R}$$

Déterminer une expression de A revient donc à trouver les valeurs de a, b et c.

Sachant que :

$$(p-1)A=2p^3-6p^2+5p-1$$

On en déduit donc que :

$$\begin{aligned}
&(p-1)(ap^2+bp+c) = 2p^3-6p^2+5p-1 \\
\iff\ & ap^3+bp^2+cp-ap^2-bp-c = 2p^3-6p^2+5p-1 \\
\iff\ & ap^3+(b-a)p^2+(c-b)p-c = 2p^3-6p^2+5p-1 \qquad (14)
\end{aligned}$$

L'expression (14) à partir de laquelle on peut donc déduire le système suivant :

$$\begin{cases} a=2 \\ b-a=-6 \\ c-b=5 \\ c=1 \end{cases} \iff \begin{cases} a=2 \\ b-2=-6 \\ c-1=5 \\ c=1 \end{cases} \iff \begin{cases} a=2 \\ b=-4 \\ b=-4 \\ c=1 \end{cases}$$

Ainsi on en déduit que :
— $\boxed{\text{a=2}}$
— $\boxed{\text{b=-4}}$
— $\boxed{\text{c=1}}$

Et donc que A peut s'écrire comme :

$$\boxed{2p^2-4p+1} \qquad (15)$$

Et donc que :

$$2p^3-6p^2+5p-1 = (p-1)(2p^2-4p+1)$$

On peut donc, une fois déterminée une expression de A, chercher comme annoncé plus tôt des valeurs ou p est nulle.
Soit résoudre l'équation suivante :

$$2p^2-4p+1=0 \qquad (16)$$

Nous allons donc tout d'abord déterminer son discriminant :

$$\Delta = 8$$

On en déduit donc que le discriminant est strictement supérieur à 0 et donc que l'équation (16) possède 2 solutions (ce qui signifie donc que l'équation (12) en possède 3).
Nous noterons ces 2 solutions p'' et p'''.
On a donc :

$$\boxed{p'' = 1 - \sqrt{\frac{1}{2}}}$$

$$\boxed{p''' = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}}}$$

Ainsi avec ces 2 solutions de l'équation (16) on peut donc en déduire une factorisation de l'expression (15) :

$$2(p - (1 - \sqrt{\frac{1}{2}}))(p - (1 + \sqrt{\frac{1}{2}}))$$

Et donc sachant que :

$$2p^3 - 6p^2 + 5p - 1 = (p - 1)(2p^2 - 4p + 1)$$

On peut aussi en déduire une factorisation de l'expression (11) :

$$\boxed{2(p - 1)(p - (1 - \sqrt{\frac{1}{2}}))(p - (1 + \sqrt{\frac{1}{2}}))} \tag{17}$$

Nous allons donc maintenant étudier le signe de l'expression (17) pour pouvoir donc étudier le signe de l'expression (7).
Cependant étant donné que 2 est un nombre positif on en déduit donc que le signe de l'expression (17) et donc de l'expression (7) dépend donc du signe de :

$$\boxed{(p - 1)(p - (1 - \sqrt{\frac{1}{2}}))(p - (1 + \sqrt{\frac{1}{2}}))} \tag{18}$$

Pour étudier le signe de l'expression (18), nous avons donc réalisé le tableau de signe suivant :

p	0	$1-\sqrt{\frac{1}{2}}$	1
$p-(1-\sqrt{\frac{1}{2}})$	$-$	0	$+$
$p-1$	$-$		$-$
$p-(1+\sqrt{\frac{1}{2}})$	$-$		$-$
$2p^3-6p^2+5p-1$	$-$	0	$+$
$P_{Vb}(p)-P_{Vb}(t)$	$-$	0	$+$

FIGURE 14 – Tableau de signe

Ainsi à partir de ce tableau de signe on peut donc déduire que :

— Lorsque $p \in \left]0;1-\sqrt{\frac{1}{2}}\right[$:
Le joueur B a en effet plus intérêt à tirer aléatoirement sur le joueur A ou C
On a donc bien les 4 stratégies équiprobables Atc, Bp, Ct(a ou b).

— Lorsque $p = 1-\sqrt{\frac{1}{2}}$:
Le joueur a en effet autant intérêt à tirer aléatoirement sur le joueur A ou C qu'à rester passif

— Lorsque $p \in \left]1-\sqrt{\frac{1}{2}};1\right[$:
Le joueur B a en effet plus intérêt à rester passif.
On a donc bien les 2 stratégies équiprobables Atc, Bp, Ct(a ou b).

Nous n'avons cependant pas pu étudier le cas ou $p = 1-\sqrt{\frac{1}{2}}$ nous allons donc considérer non plus que $0 < p < 1$ mais que $p \in \left]0;1-\sqrt{\frac{1}{2}}\right[\cup \left]1-\sqrt{\frac{1}{2}};1\right[$

Ainsi maintenant que nous connaissons pour chacun des choix possibles du joueur A les stratégies optimales qui vont s'appliquer, ce que l'on a donc fait en étudiant les choix des joueurs B et C.

Nous allons donc ensuite étudier les choix du joueur A pour en déterminer donc le choix optimal de celui-ci et ainsi la stratégie qui va s'appliquer.
Cependant pour le cas où le joueur A tire sur le joueur C la stratégie qui s'applique dépend de la valeur de p et on a donc selon cette valeur 2 stratégies possibles pour ce choix du joueur A.
Ainsi par conséquent nous avons donc 2 cas à considérer pour déterminer le choix optimal du joueur A :

Nous allons donc nous intéresser dans un premier temps au cas où $p \in \left]0; 1-\sqrt{\frac{1}{2}}\right[$:

Dans ce cas nous avons donc, pour le joueur A, 3 choix possibles :

— tirer sur le joueur B ce qui implique la stratégie Atb, Bta, Cp ;

— rester passif ce qui implique la stratégie Ap, Bta, Cp ;

— tirer sur le joueur C ce qui implique les 4 stratégies équiprobables Atc, Bt(a ou c), Ct(a ou b).

Cependant comme on peut le constater si le joueur A reste passif alors il n'y a qu'un seul joueur qui tire et ce dernier vise le joueur A.
Ainsi on en déduit donc que si le joueur A reste passif il n'a aucune chance de gagner et donc par conséquent que le joueur A ne restera pas passif
Le joueur A a ainsi 2 choix envisageables tirer sur le joueur B ou sur le joueur C

Cependant étant donné que nous ne pouvons pas déterminer intuitivement quel choix serait optimal pour le joueur A (ce qui est notamment dû aux 4 stratégies équiprobables lorsque le joueur A décide de tirer sur le joueur C) nous avons donc eu recours à des formules pour déterminer le choix optimal du joueur A.

Ce que l'on a donc fait en obtenant pour chacun des 2 choix du joueur A une formule qui nous donne la probabilité de victoire du joueur A :

— si le joueur A tire sur le joueur B :

$$P_{Va} = \frac{(1-p)p^2}{(1-(1-p)^2)^2}$$

— si le joueur A tire sur le joueur C :

$$P_{Va} = \frac{(1-p)(5-p)p^2}{2(1-(1-p)^2)(1-(1-p)^3)}$$

Puis ensuite en comparant la probabilité de victoire du joueur A que nous donnent les 2 formules (et donc pour les 2 choix) similairement à ce que nous avions fait pour le joueur B.

Après avoir fait cela nous avons donc constater que le joueur A a toujours intérêt à tirer sur le joueur C quelque soit la valeur de p que l'on étudie dans notre cas ($p \in \left]0; 1-\sqrt{\frac{1}{2}}\right[$).

Ainsi on déduit donc dans le cas où $p \in \left]0; 1-\sqrt{\frac{1}{2}}\right[$ que le joueur A va décider de tirer sur le joueur C et que l'on a donc 4 stratégies équiprobables qui sont : Atc, Bt(a ou c), Ct(a ou b).

Nous allons enfin nous intéresser au cas où $p \in \left]1-\sqrt{\frac{1}{2}}; 1\right[$:

Dans ce cas nous avons là encore, pour le joueur A, 3 choix possibles :

— tirer sur le joueur B ce qui implique la stratégie Atb, Bta, Cp ;

— rester passif ce qui implique la stratégie Ap, Bta, Cp ;

— tirer sur le joueur C ce qui implique les 2 stratégies équiprobables Atb, Bp, Ct(a ou b).

Cependant on peut là encore constater que si le joueur A reste passif alors il n'a aucune chance de gagner et donc par conséquent qu'il ne restera pas passif.
Le joueur A a donc ici aussi 2 choix envisageables tirer sur le joueur B ou sur le joueur C.

De plus on peut constater que si le joueur A tire sur le joueur B il y a toujours un joueur qui le vise alors que s'il tire sur le joueur C il n'y aura qu'une chance sur 2 qu'il soit viser par un joueur.
On en déduit donc que le joueur A aura plus de chance de gagner si il tire sur le joueur C.

Ainsi on déduit donc dans le cas où $p \in \left]1-\sqrt{\frac{1}{2}}; 1\right[$ que le joueur A va décider de tirer sur le joueur C et donc que l'on a 2 stratégies équiprobables Atb, Bp, Ct(a ou b).

On en conclut donc que lorsque 3 les joueurs ont la même précision alors si cette précision est nulle ou bien alors égale à 1 que la partie restera « bloquée »et que le duel n'aura donc jamais lieu.
Mais si cette précision est comprise dans l'intervalle $]0; 1-\sqrt{(}\frac{1}{2})[$ alors on aura 4 stratégies équiprobables :

— Atc, Bta, Cta
— Atc, Btc, Cta
— Atc, Bta, Ctb
— Atc, Btc, Ctb

et si elle est comprise dans l'intervalle $\left]1-\sqrt{\frac{1}{2}}; 1\right[$ alors on aura 2 stratégies équiprobables :

— Atc, Bp, Cta

— Atc, Bp, Ctb

Enfin nous n'avons cependant pas pu étudier entièrement le cas où $p = 1 - \sqrt{\frac{1}{2}}$.

4 Conclusion

Ainsi après avoir réalisé des arbres nous permettant de mieux visualiser la situation du cas étudié nous avons ensuite, pour déterminer la stratégie optimale qui s'appliquera, rajouté des règles et des contraintes aux joueurs réduisant par conséquents le nombre de stratégies possibles.
Nous avons ensuite utilisé des formules pour trouver la stratégie optimale parmi les stratégies qui restaient envisageables. Pour ce faire nous avons donc séparé les parties en truels et duels. Et donc tout d'abord déterminé dans un cas général les probabilités de victoire de 2 joueurs dans un duel.
Puis nous avons étudié les différents truels possibles en fonction des stratégies que les joueurs ont choisies et déterminé les probabilités que se produisent chacun des duels pour ces stratégies.

Ainsi en ayant déduit, selon les différentes stratégies envisageables, les probabilités que chacun des duels possibles se produisent et en connaissant les probabilités de victoires de ces joueurs dans ces duels, on a donc pu en déduire les probabilités de victoire des joueurs dans ces différentes stratégies.
Ce qui nous a donc permis d'en déduire la stratégie optimale (ici en fonction du joueur Ahriman) qui est donc celle où Ahriman reste passif, Bob tire sur Coton et Coton tire sur Bob.
Ainsi que les probabilités de victoires de ces joueurs qui sont respectivement 0,20 ; 0,61 ; 0,19.

Après avoir déterminé la stratégie optimale et les probabilités de victoires des joueurs dans le cas étudié, nous avons ensuite cherché à généraliser les truels à toutes les précisions possibles (entre 0 et 1) a partir d'un ordre donné.
Nous avons cependant séparé les cas d'inégalités et les cas d'égalités de précision.

Dans les cas d'inégalités nous avons aussi identifié 6 cas possibles en fonction de quels joueurs ont la plus grande précision et ainsi, de la même manière que ce que nous avons fait dans le cas étudié (qui appartient lui-même à ces cas d'inégalités) nous avons obtenu pour chacun de ces cas 3 stratégies envisageables. Avec l'une d'entre elle qui serait optimale en fonction de la précision des joueurs.

Pour les cas d'égalités nous avons là encore distingué 2 cas : si 2 joueurs ont la même précision ou bien si les 3 joueurs ont la même précision.

— Lorsque 2 joueurs ont la même précision nous avons enfin distinguer 2 cas :
  — lorsque la précision des 2 joueurs est supérieure à celle de l'autre joueur :
    auquel cas les 2 joueurs avec la même précision vont se viser mutuellement tandis que l'autre joueur va rester passif;

- et lorsque la précision des 2 joueurs est inférieure à celle de l'autre joueur :
  les 2 joueurs qui ont la même précision vont alors viser l'autre joueur tandis que celui-ci va viser aléatoirement un des 2 joueurs (une chance sur 2 de tirer sur l'un ou l'autre).

- Enfin lorsque les 3 joueurs ont la même précision nous avons là encore plusieurs cas en fonction de la précision :
  - lorsque cette précision est nulle ou alors égale a 1 : auquel cas la situation reste bloquée au truel, est aucun joueur n'est jamais éliminé ;
  - lorsque la précision est comprise dans l'intervalle $\left]0;1-\sqrt{\frac{1}{2}}\right[$: le 1er joueur dans l'ordre va tirer sur le dernier, le deuxième va tirer aléatoirement sur le premier ou le dernier joueur (une chance sur 2 de tirer sur l'un ou l'autre), le dernier va lui tirer aléatoirement sur le premier ou le deuxième joueur (une chance sur 2 de tirer sur l'un ou l'autre ;
  - lorsque la précision est comprise dans l'intervalle $\left]1-\sqrt{\frac{1}{2}};1\right[$: le 1er joueur dans l'ordre va tirer sur le dernier, le deuxième va rester passif, le dernier va lui tirer aléatoirement sur le premier ou le deuxième joueur (une chance sur 2 de tirer sur l'un ou l'autre).

4.1 Perspectives

Nous avons enfin réfléchi à des perspectives qui permettraient d'approfondir ou d'élargir nos recherches sur ce sujet.

- Comment évolueraient les stratégies et les probabilités de victoire des joueurs si on augmentait le nombre de joueurs à 4 ou plus ? Et si les joueurs changeaient de stratégie dans certaines circonstances :
  on pourrait essayer d'étudier les stratégies lorsqu'il y a 4 joueurs et ainsi on se retrouverait après l'élimination d'un joueur à un cas de truel que l'on connaît déjà et ainsi de suite avec 5,6,7... joueurs. De plus on pourrait aussi être amené à penser que le joueur le plus fort continuerait à tirer sur le 2ème plus fort et de même ce dernier viserait le plus fort. enfin que le joueur ayant la plus faible précision lui resterait passif et que les cas d'égalités ou qu'une partie des joueurs ont la même précision serait sûrement aussi similaires de ceux à 3 joueurs.
- Pour le cas où les joueurs 3 ont la même précision et que celle ci vaut $1-\sqrt{\frac{1}{2}}$, quelle est la stratégie optimale qui s'appliquerait ?
  Sachant que lorsque $p = 1-\sqrt{\frac{1}{2}}$, si le joueur A tire sur le joueur C, le joueur B n'a lui pas plus de chance de gagner la partie s'il tire sur un des joueurs aléatoirement ou bien qu'il reste passif.

On peut donc en déduire que le joueur B va aléatoirement tirer sur le joueur A ou C ou bien rester passif (avec une chance sur 3 pour chacun de ces choix).
On aurait donc 3 stratégies équiprobables qui s'appliqueraient lorsque le joueur A tire sur le joueur C.
Ainsi on pourrait donc appliquer la même démarche que pour les cas ou $p \in \left]0;1-\sqrt{\frac{1}{2}}\right[\cup \left]1-\sqrt{\frac{1}{2}};1\right.$
en déterminant ainsi le choix optimal du joueur A lorsque $p = \sqrt{\frac{1}{2}}$.

D'autre perspectives seraient intéressantes à aborder, par exemple si :
— les joueurs pouvaient attraper la balle et éliminer celui qui l'a tirée,
— la précision des joueurs changeait au cours de la partie,
— rater son tir entraînerait un effet négatif,
— un joueur réussit son tir il pourrait avoir un tir supplémentaire juste après,
— les joueurs faisaient grève contre le destin car ils en ont marre de s'affronter éternellement.

Notes d'édition

[1] Les jeunes chercheurs ont choisi d'indexer chaque R et Cr afin de se repérer dans l'arbre et former les boucles.
[2] Un petit problème de mise en page masque la réalisation des duels A/B et B/C.
[3] Les probabilités calculées sont associées à la configuration Atb Btc et Cta.
[4] Il aurait été intéressant de développer le calcul pour expliquer comment le fait que le joueur C vise aléatoirement les autres joueurs se traduit sur les probabilités de victoire.

4.2 Remerciements

Nous remercions Lucas Gerretsen et Ariane Martin qui nous ont beaucoup aidés dans l'avancée du sujet et qui ont aussi supervisé les séances Math.en.Jeans.

Nous remercions aussi Philippe Paul qui nous a aidés dans l'avancée du sujet.

Nous remercions Jules, Adélie, Eliott, Grégoire, Mohan et Camille qui ont des très bon compagnons pendant cette année de MATh.en.JEANS et qui nous ont aidés de par leurs avis très pertinents sur cet article.

Nous remercions l'association Math.en.Jeans qui a donc rendu le travail sur ce sujet, ainsi que cet article, possible.

Nous remercions enfin le lycée Carnot où les séances MATh.en.JEANS ont pu avoir lieu ainsi que le proviseur M. Devaux et les professeurs M. Vitalis, Mme Briaud et Mme Lorin-Colin pour leur intérêt envers MATh.en.JEANS cette année.

Nous remercions Les Mathématiques d'exister.

Annexe : Programmes Pythons

Annexe A : Programme python permettant de vérifier les probabilités de victoires dans le cas général (exemple : cas 1 stratégie Atb, Bta, Cta)

```
from random import* #on importe le module random pour pouvoir simuler
# des evenements aleatoire
#on definit les compteurs de victoire pour les 3 joueurs
Ca=0 #compteur de victoire d'Ahriman
Cb=0 #compteur de victoire de Bob
Cc=0 #compteur de victoire de Coton
n=int(input("le nombre de simulation :")) #on indique le nombre de
#simulations voulue
for a in range(n): #on simule n fois une partie
 J=["Ahriman","Bob","Coton"]#on rentre le nom des joueurs dans une list
 P=[1/10,1/2,1/3]#on rentre leur precisions
 while len(J)==3: #on simule la partie tant qu'il reste 3 joueurs
    #Bob tire en premier
    if randint(1,2)==1: #Si Bob touche Coton
        J.remove("Coton") #Coton est eliminer
        P.pop(2) #on se retrouve dans le duel A/B
    else: #si Bob rate son tir
          #c'est au tour de Coton de tirer
        if randint(1,3)==1: #si Coton touche Bob
            J.remove("Bob") #Bob est eliminer
            P.pop(1) #on se retrouve dans le duel A/C
 while len(J)==2: #on se retrouve ensuite dans un duel avec les 2 joueu
 #restants ou Ahriman commence
    #Ahriman tire en premier
    if randint(1,10)==1: #si Ahriman touche le deuxieme joueur restant
        J.pop(1) #le deuxieme joueur restant est eliminer
        Ca+=1 #Ahriman remporte la partie
    else: #si Arhiman rate son tir
```

```
          #c'est au tour du deuxieme joueur restant de tirer
        if randint(1,1/P[1])==1: #si le deuxieme joueur restant touche
        #Ahriman
            J.pop(0) #Ahriman est eliminer
            if P[1]==1/2: #si le deuxieme joueur restant
            #est Bob
                Cb+=1  #Bob remporte la partie
            else: #si le deuxieme joueur restant est Coton
                Cc+=1 #Coton remporte la partie
else: #on affiche enfin la frequence de victoires des joueurs
#pour pouvoir la comparer a celle de nos formules
 print("Fva=",Ca/n) #on affiche la frequence de victoire d'Ahriman
 print("Fvb=",Cb/n) #on affiche la frequence de victoire de Bob
 print("Fvc=",Cc/n) #on affiche la frequence de victoire de Coton
```