Suite d'opérations

Année 2022 – 2023

Élèves de 4ème : Alexis BUCHELIN, Antonin CHAZOTTES, Amaury DE VISMES OTT, Calliste GOMBAULT, Clément JEGU, Elliot LECLERE, Tristan PICHON, Simon ROY.
Établissement : Collège Alain-Fournier d'Orsay (91).
Enseignants : Florence FERRY et Kaourintin LE GUIBAN.
Chercheur : Emmanuel KAMMERER, Ecole Polytechnique Paris-Saclay.

Le sujet : Quel est le plus grand entier s'écrivant avec des sommes et produits de *N* chiffres 1 ? De combien de façons peut-il être obtenu ? Que dire si l'on remplace 1 par 2, 3... ?

Nos résultats : Nous avons démontré que pour les chiffres 1, le meilleur résultat s'obtient d'une ou de deux façons et nous pouvons donner ce résultat précisément quelque soit le nombre de chiffres 1 donné au départ. Pour les chiffres 2 et au delà, nous avons également démontré que nous pouvons donner le meilleur résultat : ce résultat est unique au-delà de 2 ; pour 2, il peut y avoir plusieurs façons de l'obtenir et nous pouvons dire combien il y en a pour un nombre de chiffres 2 donné.

I – Compréhension du sujet

Prenons un premier exemple avec 7 chiffres 1 :

$(1+1+1)\times(1+1)+1+1=8$; $1+1+1+1+1+1+1=7$; $1+(1+1+1)\times(1+1+1)=10$

$(1+1+1)\times(1+1+1+1)=12$

Ici le plus grand entier s'écrivant avec 7 chiffres 1 est 12. Mais est-ce vraiment le plus grand ?

Voici un deuxième exemple avec 9 chiffres 1 :

$(1+1+1)\times(1+1+1+1+1+1)=18$; $(1+1+1)\times(1+1)\times(1+1)\times(1+1)=24$;

$(1+1+1+1+1)\times(1+1+1+1)=20$

Ici encore, on se demande s'il y a un meilleur résultat.

II – Recherche du meilleur résultat

Pour commencer nos recherches, nous avons pris un petit nombre de chiffres 1 que nous avons augmenté petit à petit et nous avons étudié tous les cas. Nous avons répertorié ces recherches dans le tableau suivant.

Nombres de « 1 »	Calcul donnant le meilleur résultat	Résultats
1	1	1
2	1+1	2
3	1+1+1	3
4	1+1+1+1 ou $(1+1)\times(1+1)$	4
5	$(1+1+1)\times(1+1)$	6
6	$(1+1+1)\times(1+1+1)$	9
7	$(1+1+1)\times(1+1)\times(1+1)$ ou $(1+1+1)\times(1+1+1+1)$	12
8	$(1+1+1)\times(1+1+1)\times(1+1)$	18
9	$(1+1+1)\times(1+1+1)\times(1+1+1)$	27
10	$(1+1+1)\times(1+1+1)\times(1+1+1+1)$ ou $(1+1+1)\times(1+1+1)\times(1+1)\times(1+1)$	36
11	$(1+1+1)\times(1+1+1)\times(1+1+1)\times(1+1)$	54
12	$(1+1+1)\times(1+1+1)\times(1+1+1)\times(1+1+1)$	81
13	$(1+1+1)\times(1+1+1)\times(1+1+1)\times(1+1+1+1)$ ou $(1+1+1)\times(1+1+1)\times(1+1+1)\times(1+1)\times(1+1)$	108
14	$(1+1+1)\times(1+1+1)\times(1+1+1)\times(1+1+1)\times(1+1)$	162

On peut écrire les résultats de la colonne du milieu sous forme condensée avec des puissances.

Nombres de « 1 »	Calcul donnant le meilleur résultat	Résultats
1	1	1
2	1+1	2
3	1+1+1	3
4	1+1+1+1 ou $(1+1)^2$	4
5	$(1+1+1)\times(1+1)$	6
6	$(1+1+1)^2$	9
7	$(1+1+1)\times(1+1)^2$ ou $(1+1+1)\times(1+1+1+1)$	12
8	$(1+1+1)^2\times(1+1)$	18
9	$(1+1+1)^3$	27
10	$(1+1+1)^2\times(1+1+1+1)$ ou $(1+1+1)^2\times(1+1)^2$	36
11	$(1+1+1)^3\times(1+1)$	54
12	$(1+1+1)^4$	81
13	$(1+1+1)^3\times(1+1+1+1)$ ou $(1+1+1)^3\times(1+1)^2$	108
14	$(1+1+1)^4\times(1+1)$	162

En observant ces résultats, on commence à comprendre que pour obtenir le meilleur résultat, nous devons faire le maximum de facteurs contenant une somme de trois chiffres 1. Plus précisément nous pouvons énoncer la propriété :

> Appelons R_N le plus grand résultat obtenu avec N chiffres 1 ;
> N est un entier strictement supérieur à 1. k est un nombre entier positif.
> - Si $N=3\times k$ alors $R_N=3^k$
> - Si $N=3\times k+1$ alors $R_N=3^{k-1}\times 4$
> - Si $N=3\times k+2$ alors $R_N=3^k\times 2$

Nous allons démontrer cette propriété mais pour cela nous avons besoin de deux démontrer deux résultats.

Résultat 1 : Dans tous les facteurs, il n'y a que des additions.
Démonstration : En effet on a : $1\times 1<1+1$.
Donc maintenant on considère que dans tous les facteurs il n'y a que des additions.

Résultat 2 : Les facteurs n'ont pas plus de un « 1 » d'écart.
Démonstration : Prenons un produit de deux facteurs. Soit N un nombre entier strictement positif représentant le nombre de chiffres 1.
Si $N = 2a$ est pair, le meilleur résultat est a^2. En effet : $(a-k)(a+k) = a^2 - k^2 < a^2$
Si $N = 2a + 1$ est impair, le meilleur est $a(a+1)$.
En effet : $(a-k)(a+1+k) = a^2 + a + ak - ka - k - k^2 = a^2 + a - k^2 - k$
Or : $a^2 + a - k^2 - k < a^2 + a$ et $a^2 + a = a(a+1)$
Donc : $a^2 + a - k^2 - k < a(a+1)$ Finalement : $(a-k)(a+1+k)) < a(a+1)$
Nous venons de démontrer que pour obtenir le meilleur résultat, les facteurs doivent avoir le même nombres de « 1 » ou bien un « 1 » de différence.

Nous pouvons maintenant démontrer notre conjecture par récurrence.
Pour ce faire, nous allons démontrer que :
$R_{N+3}\geq 3\times R_N$ (1) et $R_{N+3}\leq 3\times R_N$ (2) et donc que finalement : $R_{N+3}=3\times R_N$.

(1) $R_{N+3}\geq 3\times R_N$:
Si on multiplie R_N par $(1+1+1)$, on obtient $3\times R_N$.
Donc on peut obtenir $3\times R_N$ avec $N+3$ « 1 » .
Or R_{N+3} est le plus grand nombre que l'on peut obtenir avec $N+3$ « 1 » .
Donc : $R_{N+3}\geq 3\times R_N$.

(2) $R_{N+3}\leq 3\times R_N$:
On va commencer par démontrer par l'absurde qu'il ne peut pas y avoir que des facteurs égaux à 2 :
On va supposer que $R_{N+3}=2^k$
Comme $N+3\geq 6$ on peut écrire $2^k=2^3\times 2^{k-3}$ parce que 2^3 s'écrit avec six « 1 »
Avec six « 1 » on peut obtenir 9 : $(1+1+1)\times(1+1+1)=9$

$$\frac{R_{N+3}}{9\times 2^{k-3}}=\frac{2^3\times 2^{k-3}}{9\times 2^{k-3}}=\frac{8}{9} \text{ donc } R_{N+3}<9\times 2^{k-3}$$

Or on peut écrire $9\times 2^{k-3}$ avec $N+3$ « 1 »
Donc il y a contradiction . Il y a donc un facteur $p\geq 3$ dans R_{N+3} .
On distingue 2 cas : $p=3$ (3) et $p\geq 5$ (4)

(a) S'il y a un facteur $p=3$:

$R_{N+3}=3\times M$. M peut s' écrire avec N « 1 » car on a besoin de 3 « 1 » pour écrire 3.

Donc : $M\leq R_N$ or : $M=\frac{R_{N+3}}{3}$. Donc : $R_{N+3}\leq 3\times R_N$

(b) S'il y a un facteur $p\geq 5$:

Il existe un nombre M tel que : $R_{N+3}=p\times M$

On a alors : $R_{N+3}=\frac{p}{p-3}\times(p-3)\times M$

Or $p=1+1+1+...+1$ avec p chiffres 1 ; donc $p-3=1+1+...+1$ avec $p-3$ chiffres 1.

Donc on peut écrire : $(p-3)\times M$ avec N chiffres 1.

Donc : $(p-3)\times M\leq R_N$ par définition de R_N. On a alors : $\frac{p\times(p-3)\times M}{p}\leq R_N$

Or, $p\times M=R_{N+3}$ Donc : $R_{N+3}\times\frac{(p-3)}{p}\leq R_N$ et donc : $R_{N+3}\leq R_N\times\frac{p}{p-3}$

Démontrons que $\frac{p}{p-3}\leq\frac{5}{2}\leq 3$

On a $p\geq 5$ donc

$$
\begin{aligned}
&3p\geq 15\\
&5p-2p\geq 15\\
&5p-15\geq 2p\\
&5(p-3)\geq 2p\\
&\frac{5}{2}\geq\frac{p}{p-3}
\end{aligned}
$$

Donc : $\frac{p}{p-3}\leq\frac{5}{2}\leq 3$ et donc : $R_{N+3}\leq 3\times R_N$

On a étudié toutes les valeurs possibles de p et donc nous avons bien démontré finalement que :

$$R_{N+3}=3\times R_N$$

On finalise la démonstration.

Soit N un entier supérieur ou égal à 2.

Soit P_N la propriété : « le plus grand résultat est 3^k si $N=3\times k$, $3^{k-1}\times 4$ si $N=3\times k+1$ et $3^k\times 2$ si $N=3\times k+2$ »

Initialisation :

Pour $N=2$: R2 = 2 donc P_2 est vraie.

Pour $N=3$: R3 = 3 donc P_3 est vraie.

Pour $N=4$: R4 = 4 donc P_4 est vraie.

Supposons que pour un entier N supérieur ou égal à 2, P_N est vraie, on a démontré alors que P_{N+3} est vraie.

Donc notre propriété est démontrée.

Remarque : Nous pouvons aussi dire que le meilleur résultat s'obtient d'une seule façon sauf dans les cas ou il y a un facteur de 4 chiffres 1 ; celui-ci pourra être remplacé par deux facteurs étant chacun la somme de deux chiffres 1, c'est le cas quand le nombre de chiffres 1 est le nombre entier qui suit un multiple de 3.

III – Avec d'autres chiffres que 1

Nous reprenons notre recherche du meilleur résultat en prenant d'autres chiffres que 1.

1) Recherche du meilleur résultat avec des chiffres 2

Voici les résultats trouvés après avoir étudié tous les cas.

Nombre de « 2 »	Calculs donnant le meilleur résultat	Résultats	Nombre de possibilités d'obtenir ce résultat
1	2	2	1
2	2×2 ou $2+2$	4	2
3	$2\times 2\times 2$ ou $2\times(2+2)$	8	2
4	$2\times 2\times 2\times 2$ ou $2\times 2\times(2+2)$ ou $(2+2)\times(2+2)$	16	3
5	$2\times 2\times 2\times 2\times 2$ ou $2\times 2\times 2\times(2+2)$ ou $2\times(2+2)\times(2+2)$	32	3
6	2^6 ou ...	64	4
7	2^7 ou ...	128	4
8	2^8 ou ...	256	5
9	2^9 ou ...	512	5
10	2^{10} ou ...	1024	6

Propriété 1 : Le meilleur résultat pour N chiffres 2 est 2^N.
Démonstration : On a : $2\times 2\geq 2+2$; faire des additions de 2 n'est jamais mieux que faire des multiplications ; au pire, cela donne le même résultat (pour deux chiffres 2 uniquement). Donc le meilleur résultat (qui n'est pas unique) sera obtenu en multipliant les N facteurs 2, ce qui nous donne 2^N.

Nous remarquons également que le nombre de façons d'obtenir le meilleur résultat suit une sorte de suite décrite dans la propriété 2 ci-dessous. En effet, comme $2\times 2=2+2=4$, à chaque produit 2×2 , on a un résultat équivalent en le remplaçant par 2 + 2, ce qui nous donne plusieurs possibilités pour obtenir un même résultat.

Remarque : On ne tient pas comte de l'ordre des facteurs pour compter le nombre de possibilités. Par exemple : $(2+2)\times 2\times 2$ ou $2\times 2\times(2+2)$ ou encore $2\times(2+2)\times 2$ sera considéré comme une même façon d'écrire ce résultat.

Propriété 2 : On donne N chiffres 2, N est un nombre entier strictement positif.
Si N est pair, il existe un entier k tel que : $N = 2k$: il y a alors $k + 1$ façons d'obtenir le meilleur résultat.
Si N est impair, il existe un entier k tel que : $N = 2k + 1$: là encore, il y a $k + 1$ façons d'obtenir le meilleur résultat.

Exemple : si on prend 8 chiffres 2 : $8=2\times 4$ Il y a 4 + 1 = 5 façons de trouver le meilleur résultat.
Si on prend 11 chiffres 2 : $11=2\times 5+1$ Il y a 5 + 1 = 6 façons de trouver le meilleur résultat.

Démonstration
Prenons N chiffres 2 : $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times \ldots \times 2 \times 2$
Si N est pair, il existe un entier k tel que : $N = 2k$, sinon : $N = 2k + 1$.
Que N soit pair ou impair, il y a le même nombre de produits 2×2, il y en a k.
On peut alors remplacer un produit 2×2 par une somme de 2 + 2, ou bien deux produits 2×2 par des sommes de 2 + 2, ou bien trois produits 2×2 par des sommes de 2 + 2, etc...
Il y a donc k façons d'écrire le résultat en remplaçant les « 2×2 » par « 2 + 2 » ; à ces k façons, on ajoute celle où il n'y a que des facteurs 2. Cela nous donne bien $k + 1$ façons d'obtenir le meilleur résultat.

2) Recherche du meilleur résultat avec des nombres entiers supérieurs ou égaux à 3

Soit n, un nombre supérieur ou égal à 3 : on a $n \times n > n + n$

Comme la multiplication donne un résultat strictement supérieur à l'addition, on ne fera que des multiplications. Ainsi, pour N nombres x, le meilleur résultat est : n^N et la façon de l'écrire est unique.