Nombres fusibles

Année 2022-2023

Mathis CHAMBRE, Marion DINH, Ramiza SELIMI, Andréane SIMON

Élèves de 3e

Établissement : Collège Germaine Tillion, Marseille 13012

Enseignants : Grégoire Chaperot, Manuel Noel

Chercheur : Laurent Regnier

Introduction

Voici la règle du jeu : on dispose de bougies à 2 mèches (une de chaque côté), autant que l'on veut. Lorsque l'on allume une mèche la bougie se consume entièrement en 1 heure. Si on allume les deux mèches d'une même bougie en même temps, celle-ci se consume donc en 1/2-heure. Au départ toutes les bougies sont éteintes et on a le droit d'allumer autant de mèches que l'on veut au temps 0. On peut ensuite allumer autant de mèches que l'on veut à chaque fois qu'une (ou plusieurs) bougie s'éteint.

Questions :

Peut-on mesurer ainsi 2h ? 3/4-d'heure ? 1/4-d'heure ? Quelles sont les temps que l'on peut mesurer ? Et ceux que l'on ne peut pas ? Quel est le plus petit temps fusible après 3/4-d'heure ? Et après 1h ? Et après 2h ? …

Partie 1

Recherches par bougies.

Avec la technique des bougies, nous avons découvert de nombreux temps fusibles comme 1h22 minutes et 30 secondes ou 52 minutes et 30 secondes.

Pendant un certain temps, nous avons utilisé cette technique. Mais nous avons décidé de chercher une nouvelle technique car celle-ci devenait compliqué avec le nombre de bougies.

Pour commencer, comment fait-on 3/4 d'heure ?

Bougie 1

Bougie 2

On allume les deux mèches de la première bougie, et on allume une seule mèche de la deuxième bougie.

= mèches allumées.

= mèches éteintes.

Bougie 1 = entièrement consumée

Consumée | Bougie 2

La Bougie 1 est entièrement consumée, 30 min s'est écoulé.

Temps total = 30 min

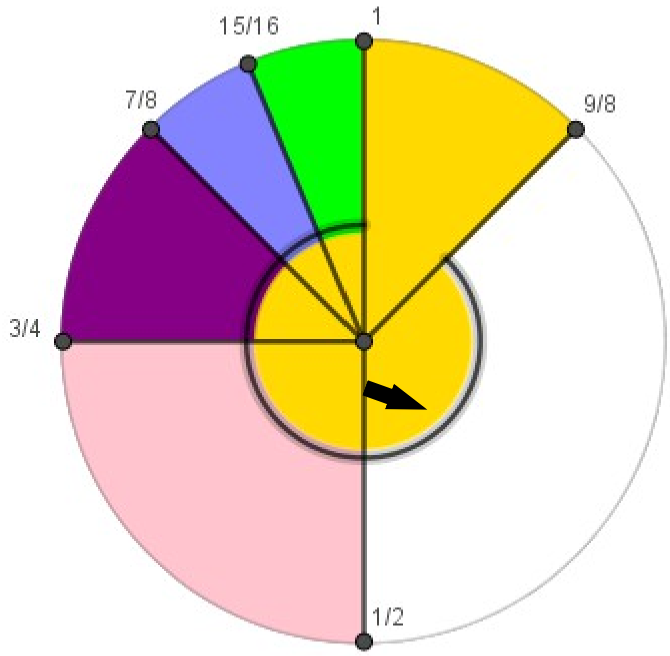
Il reste la moitié de la deuxième bougie. On allume alors la seconde mèche. Elle se consumera en 15 min.

Bougie 1 = entièrement consumée

Bougie 2 = entièrement consumée

Temps total = 45 min soit 30 min + 15 min

Nous avons décidé d'utiliser un « camembert » pour illustrer nos résultats :



Nous découvrons de nouveaux temps que nous présentons sous forme de fractions comme $\frac{7}{8}$ ou $\frac{15}{16}$, mais sur ce camembert, il n'y a pas toutes les fractions de nombres fusibles.

Partie 2

Recherche par tableau

Par suite de la technique des bougies, le chercheur nous a recommandé une méthode plus efficace : le tableau.

La première colonne nous indique le temps écoulé des bougies consumées.

La deuxième colonne nous indique le nombre de bougies à 1 mèche allumée.

La troisième colonne nous indique les nombres de bougies à 2 mèches allumées.

Temps	Temps qui reste pour se consumer, 1 mèche allumée	Temps qui reste pour se consumer, 2 mèches allumées
0	1 1 1	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$ 0
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$ 0
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$ 0
$\frac{1}{16}$	0	0

Pour connaître la durée totale des bougies consumées, on additionne les fractions de la première colonne.

Donc, nous obtenons $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$

Partie 3

La fonction PHI

Après la méthode du tableau, on a établi avec l'aide du chercheur, une fonction permettant d'obtenir de nouveaux nombres fusibles à partir de nombres fusibles déjà connus.

SI a et b sont des nombres fusibles, alors ϕ (a ; b) sera aussi un nombre fusible.

Il faut choisir : 0 < a < b <a+1.

La formule est $\varphi(a\,;b)=\dfrac{a+b+1}{2}$.

On peut également utiliser la fonction ϕ d'une manière indirecte, en vérifiant la « fusibilité » d'une fraction.

$$\varphi(a\,;b)=\frac{a+b+1}{2}$$

Utilisation directe : pour trouver de nouveaux nombres fusibles

$\frac{3}{4}$ et $\frac{1}{2}$ sont des nombres fusibles dont l'écart est inférieur à 1 donc on calcule l'image de ces nombres par ϕ :

$$\phi(\frac{3}{4};\frac{1}{2})=\frac{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+1}{2}$$

$$\phi(\frac{3}{4};\frac{1}{2})=\frac{\frac{3}{4}+\frac{2}{4}+\frac{4}{4}}{2}$$

$$\phi(\frac{3}{4};\frac{1}{2})=\frac{\frac{9}{4}}{2}$$

$$\phi(\frac{3}{4};\frac{1}{2})=\frac{9}{8}$$

<u>Donc 9/8 est un nombre fusible.</u>

Utilisation indirecte : pour vérifier la « fusibilité » de certains nombres

15/16 est-il un nombre fusible ?

On veut résoudre une équation à l'aide de la fonction ϕ pour savoir si on peut trouver a et b pour que la relation soit vraie :

$$\frac{15}{16}=\frac{a+b+1}{2}$$

$$\frac{15}{8}=a+b+1$$

$$a+b=\frac{15}{8}-1$$

$$a+b=\frac{7}{8}$$

$a=0$ et $b=7/8$ sont deux nombres fusibles déjà connus d'écart inférieur à 1, donc

$$\frac{15}{16}=\phi\left(0\,;\frac{7}{8}\right)$$

<u>15/16 est un nombre fusible lui aussi</u>

Partie 4

La liste et le tableur

La liste

Avec l'aide des différents procédés effectués précédemment, on a pu établir des listes de nombres fusibles. Chacune des listes regroupe les nombres avec un même dénominateur.

Exemple :

Dénominateur 1 = {0 ;1;2;3;4;...} 1h, 2h, 3h, ...

Dénominateur 2 = {0 ;1;2;3;4 ;...} 1/2h, 2/2h, 3/2h,...

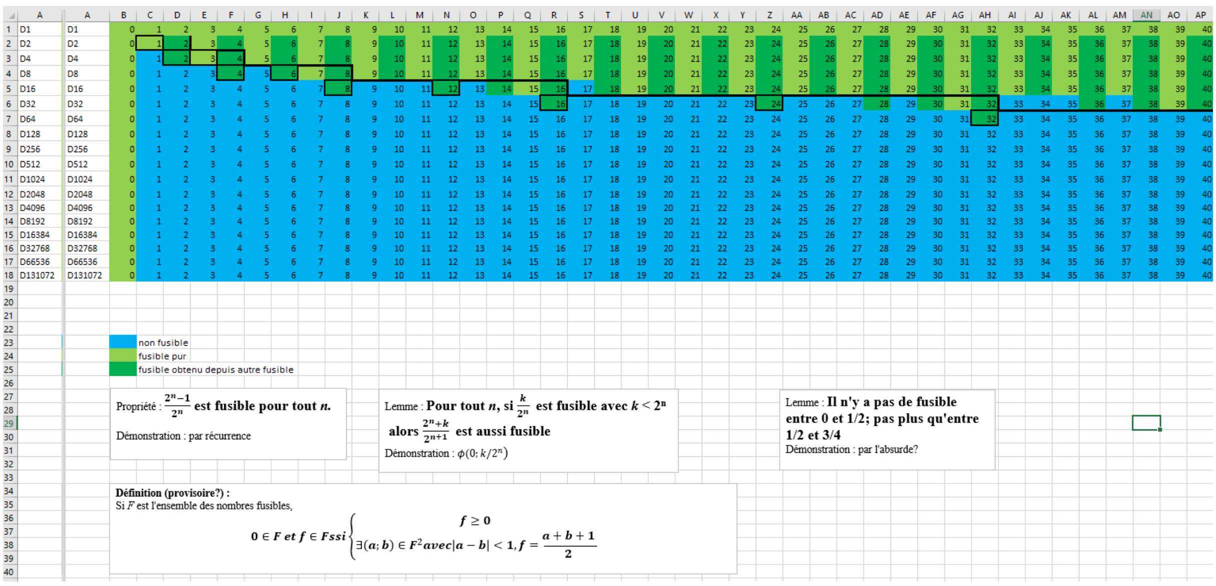
Dénominateur 4 = {0 ;2;3;4;5;6 ;...} 2/4h, 3/4h, 4/4h, ...

Dénominateur 8 = {0 ;4;6;7;8 ;...} 4/8h, 6/8h, 7/8h,...

Remarque : Certaines fractions ne peuvent pas être obtenues, nous l'avons vérifié par les équations avec la fonction ϕ. Par exemple, pour 5/8, il nous est impossible de trouver a et b de manière à ce que ϕ(a,b) = 5/8.

Après cette liste, nous avons décidé de classer ces fractions dans un tableur.

Le tableur



Vue d'ensemble

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17

<u>Détail des premières lignes</u>

	non fusible
	fusible pur
	fusible obtenu depuis autre fusible

<u>Légende</u>

On a essayé de trouver une suite logique par rapport aux fractions non obtenues. Malgré nos recherches, nous n'avons pas trouvé de suite logique. Les fractions fusibles purs sont les fractions irréductibles.

La colonne A représente tous les dénominateurs qui sont des puissances de deux. Sur la première ligne, il y a les entiers, sur la deuxième, il y a les demis etc.

A
D1
D2
D4
D8
D16
D32
D64
D128
D256
D512
D1024
D2048
D4096
D8192
D16384
D32768
D66536
D131072

Propriétés générales

Nous nous sommes rendu compte que toutes les fractions justes avant 1 étaient fusibles.
Exemple : 7/8, 3/4, 15/16 …

On a décidé de voir si c'était vrai pour toutes les fractions de la forme $\frac{2n-1}{2n}$. On a donc utilisé le raisonnement par récurrence.

En étudiant le tableur, il nous est apparu que le nombre « juste avant 1 » pour un dénominateur donné était toujours fusible (1/2 ; ¾ ; 7/8 ; 15/16 ; etc.). On a donc cherché à établir ce résultat.

Propriété :

Pour tout nombre *n*, $\frac{2^n-1}{2^n}$ est fusible (au sens de ϕ)

Démonstration : par récurrence

Initialisation

On vérifie que la propriété est vraie pour n = 0

$\frac{2^0-1}{2^0}=\frac{1-1}{1}=0$ qui est un nombre fusible : la propriété est vraie quand *n* = 0

Hérédité

(à ne pas dire mais à savoir : on suppose que la propriété est vraie pour une valeur de n et on montre qu'elle est aussi vraie pour la valeur suivante : n+1)

Soit *n* tel que $\frac{2^n-1}{2^n}$ soit fusible $\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}$ est-il aussi fusible ?

$$\begin{aligned}
\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}} &= \frac{2^{n+1}-2^{n}+2^{n}-1}{2^{n+1}} \\
&= \frac{2^{n+1}-2^{n}}{2^{n+1}} + \frac{2^{n}-1}{2^{n+1}} \\
&= \frac{2^{n}\times(2-1)}{2^{n+1}} + \frac{2^{n}-1}{2\times 2^{n}} \\
&= \quad \frac{1}{2} \qquad + \frac{1}{2}\times\frac{2^{n}-1}{2^{n}} \\
&= \frac{1}{2}\times\left(0+\frac{2^{n}-1}{2^{n}}+1\right) \\
&= \phi\left(0;\frac{2^{n}-1}{2^{n}}\right)
\end{aligned}$$

$\frac{2^n-1}{2^n}$ est bien plus petit que 1, on peut faire

Ainsi, $\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}$ est bien fusible.

Conclusion de la démonstration : <u>la propriété est initialisée et héréditaire, elle est donc vraie pour tout *n*.</u>

Deuxième propriété

Pour tout *n*, si $\frac{k}{2^n}$ est fusible avec *k* < 2^n

alors $\frac{2^n+k}{2^{n+1}}$ est aussi fusible

Démonstration : Initialisation : La propriété est vraie pour n = 0

$\frac{1}{2}$ est fusible et $\frac{3}{4}$ l'est également.

Hérédité : Supposons la propriété vraie au rang n. Nous allons la démontrer au rang n+1.

$$\phi\left(0;\frac{k}{2^n}\right)=\frac{0+\frac{k}{2^n+1}}{2}$$

$$\phi\left(0;\frac{k}{2^n}\right)=\frac{\frac{k}{2^n+\frac{2^n}{2^n}}}{2}$$

$$\phi\left(0;\frac{k}{2^n}\right)=\frac{k+2^n}{2\times 2^n}$$

$$\phi\left(0;\frac{k}{2^n}\right)=\frac{k+2^n}{2^{n+1}}$$

Nos Impressions :

Mathis : J'ai apprécié participer au congrès Math en Jeans (MEJ) qui s'est déroulé le 6 et 7 avril à Nice. Cette expérience était super chouette ! Le fait de m'épanouir dans les Maths, de renforcer ma créativité, mon imagination, ma précision, tout s'est amélioré grâce à cet atelier notamment ma présentation orale.

Ramiza : J'ai apprécié participer à l'atelier Math en Jeans qui m'a permis d'améliorer ma concentration, mon raisonnement et ma logique. J'ai aimé faire des maths d'une autre forme que celle étudiée en classe.

Andréane : C'ETAIT INCROYABLE ! Cette expérience a été très enrichissante, de plus elle m'a prouvé que les maths étaient intéressantes, et que l'on pouvait s'amuser tout en faisant des maths, d'autant plus, faire des rencontres incroyables. Si vous lisez cette impression, c'est que vous êtes à Maths En Jeans, un seul mot : PROFITER !

Quelques remerciements :

Nous souhaitons remercier les professeurs qui nous ont accompagné tout au long de l'année et qui nous ont aidé à nous épanouir. MERCI !

Nous remercions aussi notre chercheur Laurent REGNIER, sans lui, nous n'aurons pas réussi à « résoudre » notre problème.

Merci à tous les élèves qui ont participé au Congrès et de nous avoir fait connaître vos recherches.

Un merci à tous les élèves qui ont participé aux recherches mais qui n'ont pas pu venir au Congrès, et surtout MERCI aux organisateurs et à l'université de Nice de nous avoir accueilli si chaleureusement.