Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis et imperfections, autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

Conception, Analyse et Optimisation d'une Mission Spatiale

Année 2022-2023

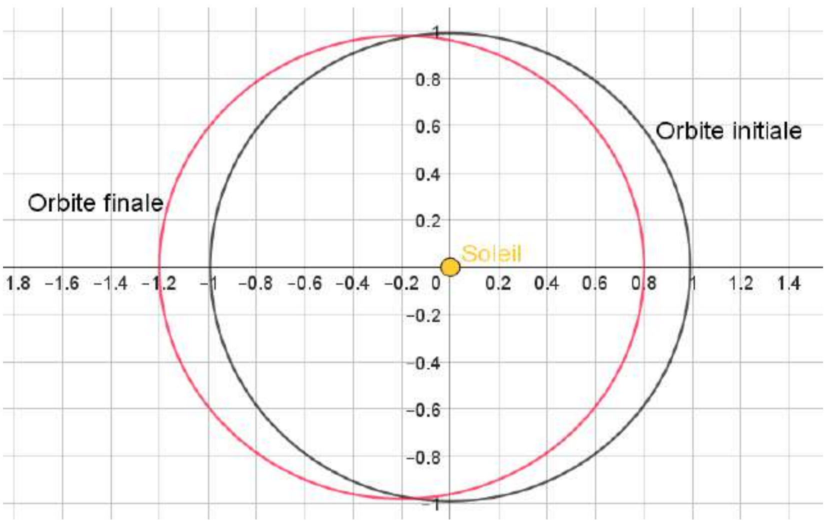
Pietro Cartocci, Sofia Profka, Taieb Gouiaa et Giulio Brouzes,
classe de terminale

Établissement : Lycée Stendhal de Milan
Enseignant : Dominique De Luca
Chercheuse : Elisa Maria Alessi, astrophysicienne, Consiglio Nazionale delle Ricerche - IMATI

Présentation : L'objet de ce travail est de comparer du point de vue énergétique les différentes manœuvres pour changer d'orbite un satellite. Une partie des résultats a été présentée au Congrès MATh.en.JEANS de Nice 2023.

Sujet : On suppose qu'il se trouve au départ sur une orbite d'excentricité 0 et de demi-grand axe 0,99 UA par rapport au Soleil. On souhaite le faire arriver sur une orbite d'excentricité 0,2 et de demi-grand axe 1 UA. L'orbite de départ est alors un cercle de rayon 0,99 UA centré sur le soleil et celle d'arrivée une ellipse dont le soleil est l'un des foyers.

La première partie de ce travail étudiera le transfert direct à manœuvre unique, la deuxième partie étudiera la manœuvre de Hohmann et la troisième partie la manœuvre bi-elliptique. En conclusion (dernière page), la comparaison du point de vue énergétique de ces 3 manœuvres.



0) Résultats utilisés lors de cette étude

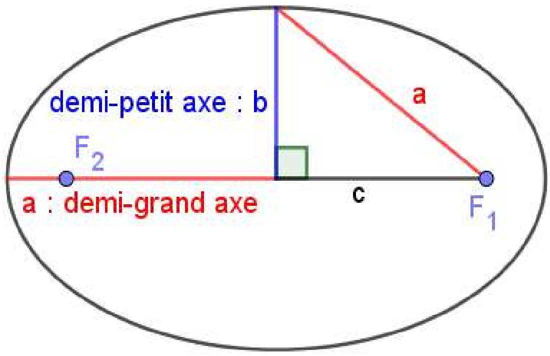
0.1) Sur les coniques :

0.1.1) Cercle

Équation cartésienne du cercle de rayon R et de centre O(x_o; y_o) :

$$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = R^2$$

0.1.2) Ellipse



a : longueur du demi grand axe, b : longueur du demi petit axe, c : distance séparant le centre de l'ellipse et un des foyer, e : excentricité de l'ellipse

Relations entre e, a, b et c :

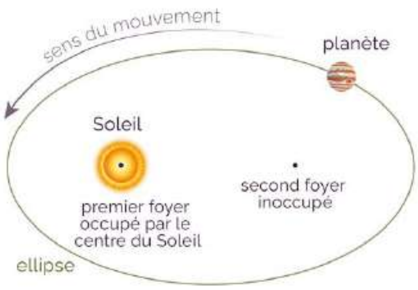
$c = \sqrt{a^2 - b^2}$, $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2}$.

Equation cartésienne (ellipse de centre le centre du repère) : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

0.2) Les lois de Kepler (1)

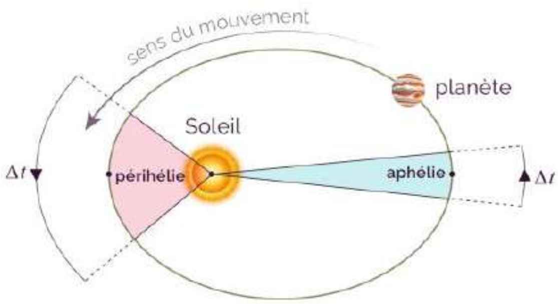
Astronome de la fin du XVIe siècle, début du XVIIe. Il étudie l'hypothèse héliocentrique de Copernic et découvre les relations mathématiques qui décrivent le mouvement des planètes.

0.2.1) Loi des orbites. Les trajectoires des corps célestes sont des coniques. Les planètes décrivent des ellipses.



0.2.2) Loi des aires. Des aires égales sont balayées durant des temps égaux.

Conséquence : Soient l'aphélie la position la plus lointaine du soleil et la périhélie la position la plus proche du soleil. Une planète se déplace plus vite à la périhélie et moins vite à l'aphélie.



0.2.3) Loi des périodes

Soit T la période, a la longueur du demi grand axe, G la constante de gravitation et M la masse de l'astre.

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = \textit{constante.}$$

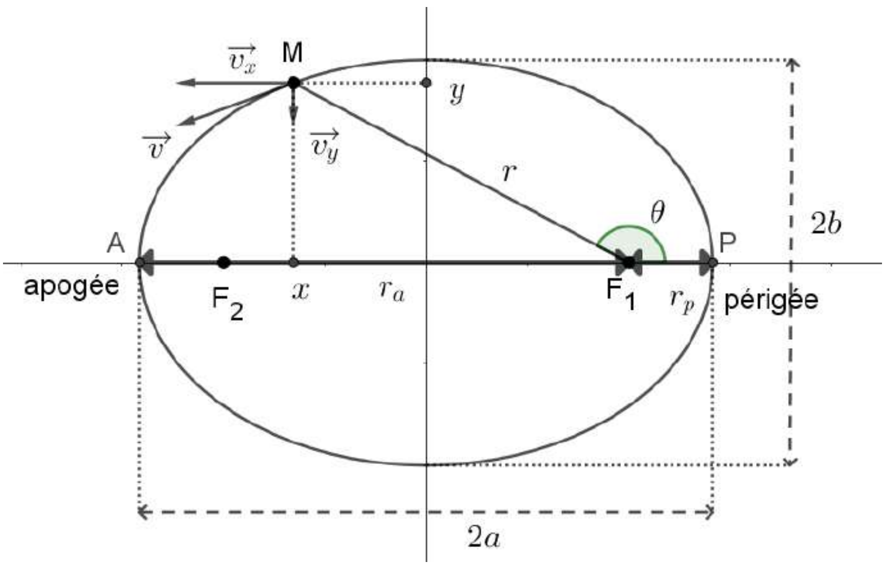
0.3) Vitesse gravitationnelle

La vitesse d'un satellite en tout point d'une ellipse est donnée par la formule (2)

$$v = \sqrt{\mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)},$$

où r (rayon vecteur) indique la distance entre le satellite et le foyer de référence, a le demi grand axe de l'ellipse et $\mu = GM$ où G désigne la constante de gravitation et M la masse du corps autour duquel gravite notre satellite (ici, la masse du soleil).

0.4) Figure et notations : Le soleil se trouve en F_1.



1 - TRANSFERT DIRECT À MANŒUVRE UNIQUE

On constate que le cercle et l'ellipse sont sécants en deux points. Quel serait le coût énergétique pour effectuer le transfert en l'un de ces points, c'est-à-dire, passer de l'orbite circulaire à l'orbite elliptique en un de ces deux points d'intersections ?

Nous prenons $1\text{UA} \approx 1{,}5 \times 10^8$ km ; tous les calculs sont faits en unité astronomique. Le soleil est le centre de notre repère.

1.1) On considère que le cercle est une ellipse d'excentricité 0. De plus, on a ici $a = b = 0{,}99$; $b^2 = 0{,}9801$; $e = 0$.

Pour l'orbite elliptique : $a = 1$; $e = 0{,}2$.

On doit calculer la valeur du b de l'orbite elliptique pour compléter nos données.

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \;\Leftrightarrow\; e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} \;\Leftrightarrow\; -e^2a^2 + a^2 = b^2,$$

donc

$$b = \sqrt{-e^2a^2 + a^2} = \sqrt{-(0{,}2)^2 \times 1^2 + 1} = \sqrt{0{,}96} \approx 0{,}979796.$$

On part de l'équation cartésienne d'une ellipse : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \;\Rightarrow\; y = \pm\sqrt{b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}}$.

Or le foyer de notre ellipse particulière est décalé de ae par rapport au centre du cercle car le soleil est un des foyers (voir figure en page 1). Donc, en remplaçant x par $x + ae$, notre ellipse a pour équation :

$$\frac{(x+ae)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \;\Rightarrow\; y = \pm\sqrt{b^2 - \frac{b^2(x+ae)^2}{a^2}} \;.$$

Ainsi, en ne considérant que l'ordonnée positive :

$$y_{ellipse} = \sqrt{b^2 - \frac{b^2(x+ae)^2}{a^2}} = \sqrt{0{,}96 - \frac{0{,}96(x+0{,}2)^2}{1^2}} = \sqrt{0{,}96 - 0{,}96(x+0{,}2)^2} \;.$$

L'équation de l'orbite circulaire est : $x^2 + y^2 = R^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 0{,}99^2$. Donc

$$y_{cercle} = \pm\sqrt{0{,}99^2 - x^2}$$

1.2) Intersection entre l'ellipse et le cercle

Les coordonnées des points d'intersection de l'ellipse et du cercle doivent vérifier

$$\frac{(x+ae)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ et } y_{cercle} = \pm\sqrt{0{,}99^2 - x^2}.$$

Donc

$$\frac{(x + 1 \times 0.2)^2}{1^2} + \frac{y_{cercle}^2}{0{,}96} = 1 \;\Leftrightarrow\; (x+0{,}2)^2 + \frac{y_{cercle}^2}{0{,}96} = 1$$

$$\Leftrightarrow\; x^2 + 0{,}4\,x + 0{,}04 + \frac{y_{cercle}^2}{0{,}96} = 1$$

$$\Leftrightarrow 0{,}96x^2 + 0{,}384x + 0{,}0384 + y_{cercle}^2 = 0{,}96$$

$$\Leftrightarrow\; 0{,}96x^2 + 0{,}384x + 0{,}0384 + 0{,}99^2 - x^2 - 0{,}96 = 0$$

$$\Leftrightarrow\; -0{,}04x^2 + 0{,}384x + 0{,}0585 = 0$$

$$\Leftrightarrow\; 0{,}04x^2 - 0{,}384x + 0{,}0585 = 0$$

On peut calculer le discriminant pour trouver la ou les racines de ce trinôme :

$$\Delta = (-0{,}384)^2 + 4 \times 0{,}04 \times 0{,}0585 = 0{,}156816$$

$0{,}156816 > 0$, donc il y a 2 racines possibles :

$$x' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{0{,}384 - \sqrt{0{,}156816}}{2 \times 0{,}04} = -0{,}15 \text{ et } x'' \; \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{0{,}384 + \sqrt{0{,}156816}}{2 \times 0{,}04} = 9{,}75.$$

Étant donné que le cercle a un rayon de 1UA, on peut définir un intervalle des abscisses des points d'intersection possible entre $-0{,}99$ et $0{,}99$. Ainsi la valeur 9,75 n'est pas possible car elle n'appartient pas à l'intervalle.

On a donc une seule solution à l'équation qui est $x = -\ 0{,}15$.

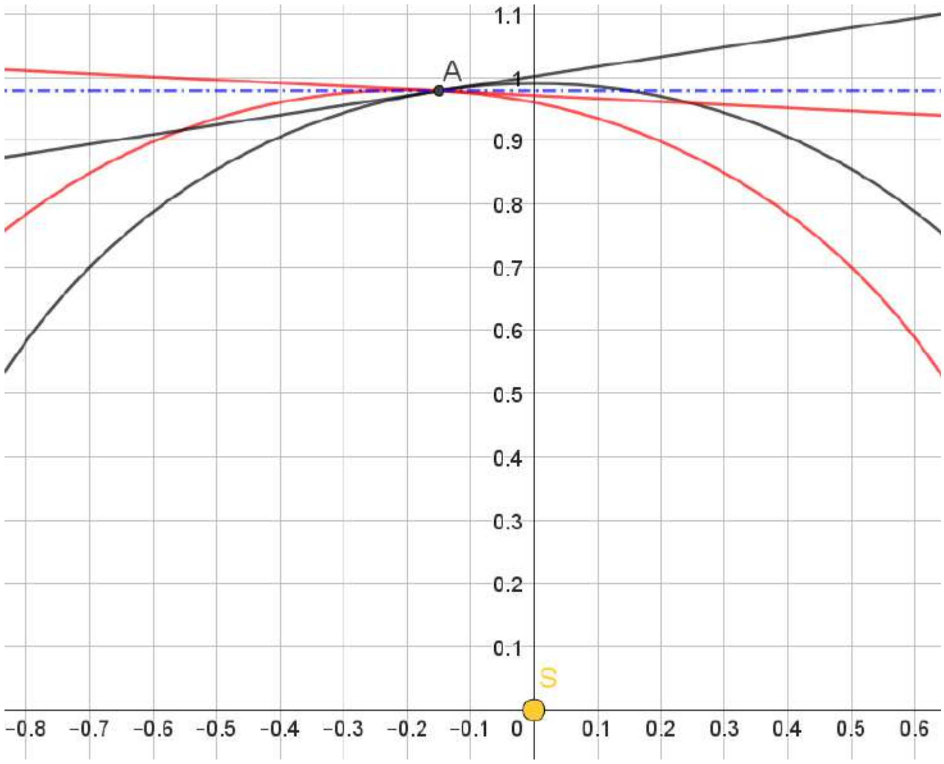
Pour $x = -\ 0{,}15$, on a alors (en ne considérant que l'ordonnée positive)

$$y_{ellipse} = y_{cercle} = \sqrt{0{,}99^2 - (-0{,}15)^2} = \sqrt{0{,}9576} \approx 0{,}97857.$$

Ainsi notre point d'intersection a pour coordonnées $x = -\ 0{,}15$ et $y = \sqrt{0{,}9576}$. Soit A ce point.

1.3) Cherchons l'angle que forment les tangentes à l'ellipse et au cercle en A :

En effet, pour calculer l'écart de vitesse à donner au satellite au point A pour passer de l'orbite circulaire à l'orbite elliptique, nous avons besoin de déterminer les tangentes en chacune de ces courbes car ce sont elles qui portent les vecteurs vitesse du satellite.



On peut calculer la dérivée grâce à la formule de dérivation de la fonction $\sqrt{u}$ qui donne $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

D'où

$$y'_{cercle} = \frac{-2x}{2\sqrt{0{,}99^2 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{0{,}99^2 - x^2}},$$

$$y'_{ellipse} = \frac{-2 \times 0{,}96 \times (x+0{,}2)}{2\sqrt{0{,}96 - 0{,}96(x+0{,}2)^2}} = \frac{-0{,}96x - 0{,}192}{\sqrt{0{,}96 - 0{,}96(x+0{,}2)^2}}$$

Pour $x = -\ 0{,}15$, le coefficient directeur de la tangente en A au cercle est donc

$$-\frac{x}{\sqrt{0{,}99^2 - x^2}} = \frac{0{,}15}{\sqrt{0{,}99^2 - (-0{,}15)^2}} = \frac{0{,}15}{\sqrt{0{,}9576}}.$$

Soit α_c l'angle que fait cette tangente avec l'horizontale ; on a alors $\tan(\alpha_c) = \frac{0{,}15}{\sqrt{0{,}9576}}$, d'où

$$\alpha_c \approx 8{,}71474° .$$

Pour $x = -\ 0{,}15$, le coefficient directeur de la tangente en A à l'ellipse est donc

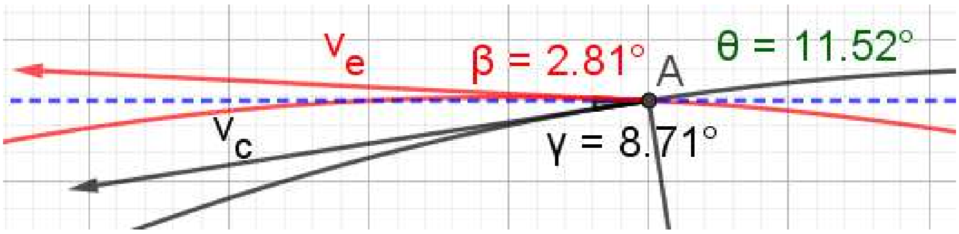
$$\frac{-0{,}96x - 0{,}192}{\sqrt{0{,}96 - 0{,}96(x+0{,}2)^2}} = \frac{-0{,}96 \times (-0{,}15) - 0{,}192}{\sqrt{0{,}96 - 0{,}96(0{,}2 - 0{,}15)^2}} = \frac{-0{,}048}{\sqrt{0{,}9576}}.$$

Soit α_e l'angle que fait cette tangente avec l'horizontale, on a alors tan(α_e) = $\frac{-0{,}048}{\sqrt{0{,}9576}}$, d'où

$$\alpha_e \approx -2{,}80817°.$$

L'angle α formé par les deux tangentes est donc $\alpha_c - \alpha_e \approx 11{,}5229°$.

1.4) Pour passer d'une orbite à une autre, le satellite doit changer sa vitesse au point A, et passer de V_c, sa vitesse sur le cercle en A à V_e, sa vitesse sur l'ellipse en A. On suppose négligeable le temps de passage d'une vitesse à l'autre.



$$\Delta V^2 = \|\overrightarrow{v_e} - \overrightarrow{v_c}\|^2 = \|\overrightarrow{v_e}\|^2 + \|\overrightarrow{v_c}\|^2 - 2\|\overrightarrow{v_e}\| \times \|\overrightarrow{v_c}\| \times \cos(\theta)$$

D'où, en posant $v_e = \|\overrightarrow{v_e}\|$ et $v_c = \|\overrightarrow{v_c}\|$,

$$\Delta V = \sqrt{v_e^2 + v_c^2 - 2v_e \times v_c \times \cos(\theta)}.$$

On rappelle que la vitesse du satellite est donnée par $V = \sqrt{\frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}}$, μ étant une constante de gravitation spécifique à l'astre attracteur.

Dans le cas du soleil, on a $\mu = 132\,712\,440\,018$ km^{3}s^{-2} $\approx$ 887,1 UA $\times$ km^{2}s^{-2}. (3)

Pour calculer $V_{cercle} = V_c$ et $a = r = 0{,}99$ UA, donc

$$V_c = \sqrt{\frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{r}} = \sqrt{\frac{\mu}{0{,}99}} \approx 30{,}123 \text{ km/s}.$$

Pour calculer $V_{ellipse} = V_e$, $a = 1$ et $r = 0{,}99$, puisque r est la distance entre le satellite et l'astre attracteur, au point d'intersection cette distance est égale au rayon du cercle soit 0,99 UA.

$$V_e = \sqrt{\frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}} = \sqrt{\frac{2\mu}{0{,}99} - \mu} \approx 30{,}501 \text{ km/s}.$$

Ainsi on peut calculer la variation de vitesse avec la formule précédente :

$$\begin{aligned}\Delta V &= \sqrt{v_e^2 + v_c^2 - 2v_e \times v_c \times \cos(\theta)} \\ &\approx \sqrt{30{,}501^2 + 30{,}123^2 - 2 \times 30{,}123 \times 30{,}501 \times \cos(11{,}5229)} \\ &\approx 6{,}09746 \text{ km/s}.\end{aligned}$$

1.5) Remarque : par symétrie, nous obtenons les mêmes valeurs du ΔV au point d'intersection des orbites d'ordonnée négative.

2 - TRANSFERT DE HOHMANN

2.1) Principe :

Un autre type de transfert étudié est le transfert de Hohmann. Ce transfert consiste à transférer des satellites ou des sondes d'une orbite à une autre en parcourant une demi-ellipse intermédiaire. Pour cela nous parlons de transfert mono-elliptique. Lors de ce transfert nous allons parler d'orbite initiale, d'orbite finale et d'orbite de transfert. Lors du passage d'une orbite à l'autre nous devons exécuter des manœuvres. Dans notre cas, il y a deux manœuvres à effectuer qui sont tangentes à la trajectoire (une manœuvre étant un changement de vitesse). Cela signifie que ces manœuvres, contrairement au transfert direct, ont la même direction sur l'orbite initiale et l'orbite finale.

Alors que le transfert de Hohmann se fait généralement d'une orbite initiale circulaire à une orbite finale circulaire, avec notre chercheur, nous avons choisi d'étudier un transfert de Hohmann d'une trajectoire circulaire à une trajectoire elliptique. Plus précisément nous avons choisi d'étudier deux cas spécifiques, à savoir de réaliser un premier transfert partant de la trajectoire circulaire, et plus précisément de l'aphélie de l'orbite de transfert pour arriver au périhélie de cette même orbite qui correspond aussi au périhélie de l'orbite finale et un deuxième transfert partant de la trajectoire circulaire, et plus précisément du périhélie de l'orbite de transfert pour arriver à l'aphélie de cette même orbite qui correspond aussi à l'aphélie de l'orbite finale.

Ainsi nous devons calculer 2 manœuvres pour chaque transfert, une manœuvre se calculant en soustrayant la vitesse du satellite sur l'orbite sur laquelle il se trouve à la vitesse de l'orbite sur laquelle le satellite arrive. Une première manœuvre sera ainsi le résultat de la vitesse sur l'orbite de transfert moins la vitesse sur l'orbite initiale et une deuxième manœuvre sera le résultat de la vitesse sur l'orbite finale moins la vitesse sur l'orbite de transfert. Pour calculer ces vitesses nous avons donc trois formules :

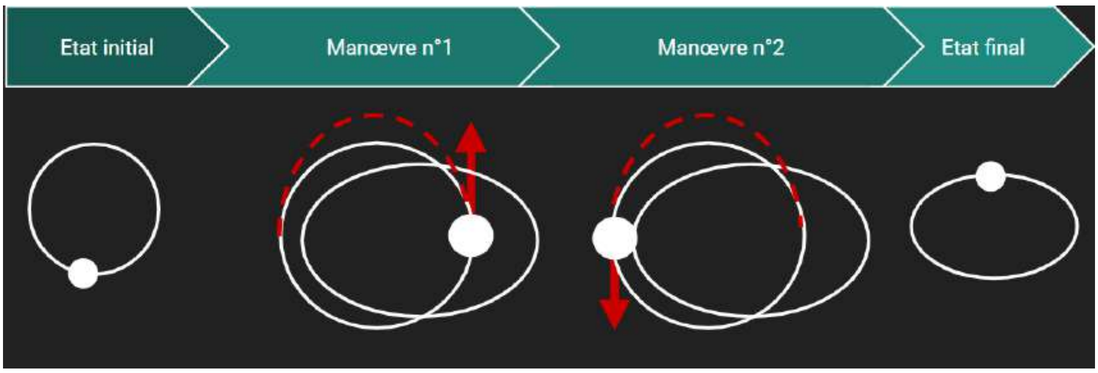
$$v_{per} = \sqrt{\frac{\mu(1+e)}{a(1-e)}}, \qquad v_{ap} = \sqrt{\frac{\mu(1-e)}{a(1+e)}} \text{ et } v_{cercle} = \sqrt{\frac{\mu}{r}}.$$

à savoir respectivement la vitesse au périhélie, la vitesse à l'aphélie et la vitesse sur un cercle (qui est constante).

Nous arrivons à notre dernière formule en sachant que "e" représente l'excentricité qui est l'aplatissement d'une ellipse par rapport à un cercle et qui vaut donc 0 pour un cercle.

Tous les calculs seront premièrement fait en UA et après converti en km.s^{-1} en sachant que 1 UA ≈ 150 millions de km.

2.2) Calculs des vitesses de transfert (4)

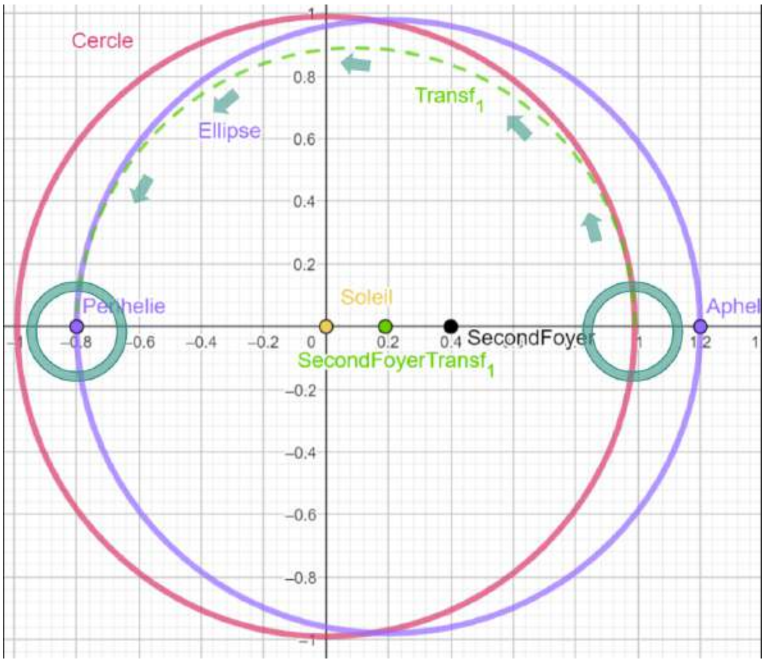


Il faut donc calculer la vitesse qu'a le satellite au moment de commencer les deux manœuvres, ainsi que la vitesse qu'il doit atteindre dans les deux cas pour atteindre ou quitter l'orbite de transfert.

Initialement, se trouvant sur l'orbite circulaire sa vitesse est donc constante et vaut : $V_{cercle} = \sqrt{\frac{\mu}{r}}$, avec μ le paramètre gravitationnel standard héliocentrique égal à $G \times M_{\text{Soleil}}$ soit 132712440018 km^3.s^{-2} et r le rayon de notre orbite circulaire initiale égal à 0,99 UA.
Dans le cas de notre cercle on a donc

$$V_{cercle} = \sqrt{\frac{132712440018}{0{,}99 \times 150 \times 10^6}} \approx 29{,}89458922 \text{ km. s}^{-1}$$

Dans le cas du transfert n°1, il faut donc calculer la vitesse du satellite à l'aphélie de l'orbite de transfert à laquelle on va soustraire la vitesse sur l'orbite circulaire pour la première manœuvre, puis les vitesses au périhélie de l'ellipse d'arrivée et de l'orbite de transfert pour la deuxième manœuvre.



La vitesse du satellite en tout point de l'ellipse est donnée par la formule $v = \sqrt{\mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}$ avec "r" le "rayon-vecteur", c'est-à-dire la distance entre le satellite et le foyer de l'ellipse. On en déduit donc les formules suivantes simplifiées pour le périhélie et l'aphélie d'une ellipse dont on connaît le demi-grand axe a et l'excentricité e :

$$v_{per} = \sqrt{\frac{\mu(1+e)}{a(1-e)}} \text{ et } v_{ap} = \sqrt{\frac{\mu(1-e)}{a(1+e)}} .$$

Le demi-grand axe et l'excentricité de l'ellipse d'arrivée nous sont connus, mais il faut calculer les paramètres de l'ellipse de transfert. On trouve que son demi-grand axe vaut :

$$a_{Transf_1} = \frac{ra_{Transf_1} + rp_{Transf_1}}{2} = 0{,}895 \text{ UA,}$$

avec ra_{Transf_1} la distance séparant aphélie et foyer de l'ellipse de transfert, et rp_{Transf_1} la distance séparant périhélie et foyer de l'ellipse de transfert (5).

Pour l'excentricité, on trouve que celle-ci vaut

$$e_{Transf_1} = \frac{ra_{Transf_1} - rp_{Transf_1}}{ra_{Transf_1} + rp_{Transf_1}} = \frac{0{,}99 - 0{,}8}{0{,}99 + 0{,}8} = \frac{19}{179}$$

Ainsi, on peut calculer le ΔV des deux manœuvres de la façon suivante (on peut faire référence à l'image) :

$$\Delta V_1 = V_{apTransf_1} - V_{cercle} = \sqrt{\frac{\mu(1 - e_{Transf_1})}{a_{Transf_1}(1 + e_{Transf_1})}} - \sqrt{\frac{\mu}{r}}$$
$$\approx \sqrt{\frac{132712440018\left(1 - \frac{19}{179}\right)}{0{,}895 \times 150 \times 10^6 \left(1 - \frac{19}{179}\right)}} - \sqrt{\frac{132712440018}{0{,}99 \times 150 \times 10^6}}$$
$$\approx 28{,}2635081 - 29{,}89458922 \approx -1{,}63108112 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}.$$

$$\Delta V_2 = V_{perEllipse} - V_{perTransf_1} = \sqrt{\frac{\mu(1 + e)}{a(1 - e)}} - \sqrt{\frac{\mu(1 + e_{Transf_1})}{a_{Transf_1}(1 - e_{Transf_1})}}$$
$$\approx \sqrt{\frac{132712440018(1 + 0{,}2)}{150 \times 10^6 \times (1 - 0{,}2)}} - \sqrt{\frac{132712440018(1 + \frac{19}{179})}{0{,}895 \times 150 \times 10^6 \times (1 - \frac{19}{179})}}$$
$$\approx 36{,}42971864 - 34{,}97609128 \approx 1{,}45362736 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}.$$

On a donc $\Delta V_{tot} = |\Delta V_1| + |\Delta V_2| = 3{,}08470848 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$, la variation totale de vitesse sur l'ensemble du transfert.

Il est intéressant de remarquer que l'une des valeurs trouvées est négative. Cela est dû au fait que cette première manœuvre est une décélération, la vitesse sur l'orbite à atteindre est moins importante par rapport à celle sur l'orbite de laquelle on part. Pour calculer la variation totale ΔV_{tot} on prend cependant la valeur absolue des valeurs des deux manœuvres puisque bien qu'il s'agisse d'une réduction de la vitesse, la consommation en termes d'énergie est identique à celle d'une augmentation de même valeur de la vitesse (6). On allume bien dans les deux cas le moteur-fusée, il faut donc prendre en compte la valeur absolue du résultat trouvé.

2.3) Approche énergétique :

On peut intégrer à cette étude une approche énergétique. L'intérêt ici est, d'une part, expliciter le lien entre vitesse et énergie (7), c'est pourquoi dans cet article les deux termes sont parfois utilisés de façon interchangeable, mais d'autre part, pouvoir vérifier nos résultats des calculs de vitesse. En effet, on trouve que

$$E = Ec + Ep = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a}, \text{ donc } v = \sqrt{\frac{-\mu}{a} + \frac{2\mu}{r}}.$$

Ainsi, on voit que vitesse et énergie sont proportionnelles et que si on isole la vitesse on peut vérifier nos calculs précédents en connaissant le demi-grand axe "a" et le rayon-vecteur "r".
Puisque l'on se place toujours à l'aphélie ou au périhélie, le rayon-vecteur vaut, selon la manœuvre, "ra" ou "rp".

On peut ainsi calculer notre vérification énergétique :

$$V_{apTransf_1} = \sqrt{\frac{-\mu}{a_{Transf_1}} + \frac{2\mu}{ra_{Transf_1}}} = \sqrt{\frac{-132712440018}{} + \frac{2 \times 132712440018}{0{,}99 \times 150 \times 10^6}}$$
$$\approx 28{,}2635081$$

$$V_{cercle} = \sqrt{\frac{-\mu}{r} + \frac{2\mu}{r}} \approx 29{,}89458922$$

$$V_{perTransf_1} = \sqrt{\frac{-\mu}{a_{Transf_1}} + \frac{2\mu}{rp_{Transf_1}}} = \sqrt{\frac{-132712440018}{0.895 \times 150 \times 10^6} + \frac{2 \times 132712440018}{0{,}8 \times 150 \times 10^6}}$$
$$\approx 34{,}97609128$$

$$V_{perEllipse} = \sqrt{\frac{-\mu}{a} + \frac{2\mu}{rp_{Ellipse}}} = \sqrt{\frac{-132712440018}{150 \times 10^6} + \frac{2 \times 132712440018}{0{,}8 \times 150 \times 10^6}}$$
$$\approx 36{,}42971864.$$

Les valeurs trouvées ci-dessus correspondent bien à celles trouvées précédemment.

2.4) Durée du transfert :

Nous allons ensuite calculer la d urée de ce transfert et, pour cela, nous allons utiliser la troisième Loi de Kepler, à savoir $\frac{T^2}{a^3} = constante = \frac{4\pi^2}{G \cdot M_{Soleil}}$ avec T la période de révolution du satellite qui est la valeur que nous voulons trouver et que nous allons alors isoler pour arriver à la formule suivante :

$$T_1 = \sqrt{\frac{a^3 \times 4\pi^2}{G \times M_{Soleil}}}$$

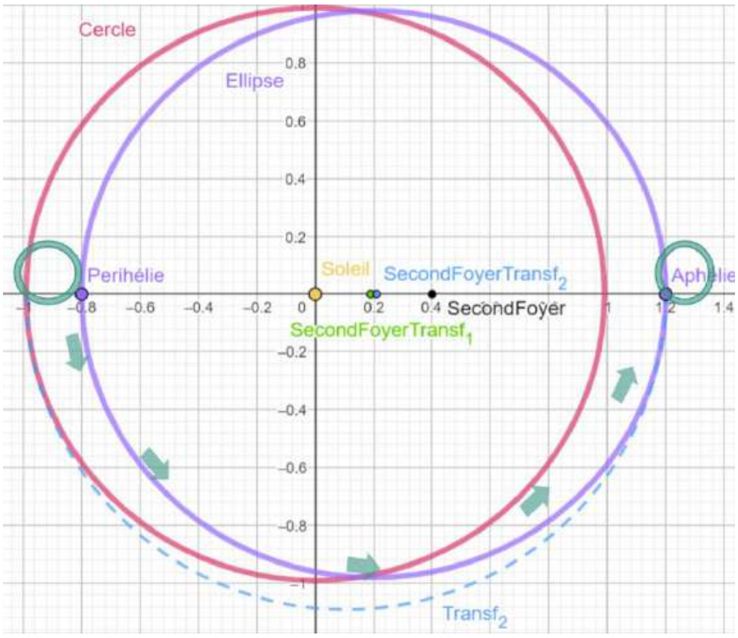
Ainsi nous calculons la période de révolution du satellite sur une orbite de transfert complète : (8)

$$T_1 = \sqrt{\frac{(0{,}895 \times 150 \times 10^6)^3 \times 4\pi^2}{6{,}67 \times 10^{-20} \times 2 \times 10^{30}}} \approx 2{,}68 \times 10^7 \text{s} \approx 310 \text{ jours.}$$

Pourtant, comme dit auparavant, lors d'un transfert de Hohmann le satellite en question va parcourir seulement une demi ellipse de transfert donc la durée de ce transfert sera

$$\Delta t_1 = T_1/2 = 155 \text{ jours.}$$

Dans le cas du transfert n°2 donc, il faut calculer la vitesse du satellite au périhélie de l'orbite de transfert à laquelle nous allons soustraire la vitesse sur l'orbite circulaire pour la première manœuvre. Ensuite nous allons calculer la vitesse à l'aphélie de l'ellipse d'arrivée qui correspond à l'aphélie de l'orbite de transfert pour la deuxième manœuvre.



Encore une fois, nous avons utilisé les formules de la vitesse du satellite au périhélie et à l'aphélie en changeant, cependant, quelques valeurs. Pour ce transfert, le demi-grand axe "a" vaut 1,095 UA et l'excentricité "e" vaut 7/73 que nous avons trouvé grâce à ces calculs :

$$e_{Transf_2} = \frac{ra_{Transf_2} - rp_{Transf_2}}{ra_{Transf_2} + rp_{Transf_2}} = \frac{1{,}2 - 0{,}99}{1{,}2 + 0{,}99} = \frac{7}{73}$$

$$a_{Transf_2} = \frac{ra_{Transf_2} + rp_{Transf_2}}{2} = 1{,}095 \text{ UA.}$$

avec ra_{Transf_2} la distance séparant aphélie et foyer de l'ellipse de transfert et rp_{Transf_2} la distance séparant périhélie et foyer de l'ellipse de transfert.

Ainsi nous calculons les deux manœuvres de façon suivante (nous pouvons faire référence à l'image) :

$$\Delta V_1 = V_{periTransf_2} - V_{cercle} = \sqrt{\frac{\mu(1 + e_{Transf_2})}{a_{Transf_2}(1 - e_{Transf_2})}} - \sqrt{\frac{\mu}{r}}$$

$$= \sqrt{\frac{132712440018(1 - \frac{7}{73})}{1{,}095 \times 150 \times 10^6(1 + \frac{7}{73})}} - \sqrt{\frac{132712440018}{0{,}99 \times 150 \times 10^6}}$$

$$\approx 31{,}29508631 - 29{,}89458922 \approx 1{,}40049709 \text{ km.s}^{-1}.$$

Et

$$\Delta V_2 = V_{apoEllipse} - V_{apoTransf_2} = \sqrt{\frac{\mu(1 - e)}{a(1 + e)}} - \sqrt{\frac{\mu(1 - e_{Transf_2})}{a_{Transf_2}(1 + e_{Transf_2})}}$$

$$= \sqrt{\frac{132712440018(1 - 0.2)}{150 \times 10^6(1 + 0.2)}} - \sqrt{\frac{132712440018(1 - \frac{7}{73})}{1{,}095 \times 150 \times 10^6(1 + \frac{7}{73})}}$$

$$\approx 24{,}28647909 - 25{,}81844621 \approx -1{,}53196712 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Nous avons donc $\Delta V_{tot} = |\Delta V_1| + |\Delta V_2| \approx 2{,}93246421 \text{ km.s}^{-1}$ la variation totale de vitesse sur l'ensemble du transfert.

Nous avons encore une fois une valeur négative pour la deuxième manœuvre pour les mêmes raisons citées auparavant.

De façon analogue au premier transfert, on peut vérifier les calculs de vitesse à l'aide d'une approche énergétique:

$$V_{periTransf_2} = \sqrt{\frac{-\mu}{a_{Transf_2}} + \frac{2\mu}{rp_{Transf_2}}} = \sqrt{\frac{-132712440018}{1{,}095 \times 150 \times 10^6} + \frac{2 \times 132712440018}{0{,}99 \times 150 \times 10^6}} \approx 31{,}29508631$$

$$V_{cercle} = \sqrt{\frac{-\mu}{r} + \frac{2\mu}{r}} \approx 29{,}89458922$$

$$V_{apoTransf_2} = \sqrt{\frac{-\mu}{a_{Transf_2}} + \frac{2\mu}{ra_{Transf_2}}} = \sqrt{\frac{-132712440018}{1{,}095 \times 150 \times 10^6} + \frac{2 \times 132712440018}{1{,}2 \times 150 \times 10^6}} \approx 25{,}81844621$$

$$V_{apoEllipse} = \sqrt{\frac{-\mu}{a} + \frac{2\mu}{ra_{Ellipse}}} = \sqrt{\frac{-132712440018}{150 \times 10^6} + \frac{2 \times 132712440018}{1{,}2 \times 150 \times 10^6}} \approx 24{,}28647909.$$

Pour calculer la durée de ce deuxième transfert, nous employons toujours la troisième Loi de Kepler qui nous donne la durée du parcours de l'ellipse complète :

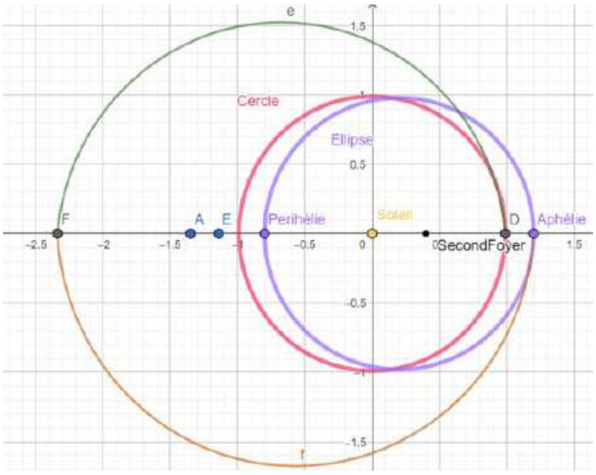
$$T_2 = \sqrt{\frac{(1{,}095 \times 150 \times 10^9)^3 \times 4\pi^2}{6{,}67 \times 10^{-20} \times 2 \times 10^{30}}} \approx 3{,}62 \times 10^7 \text{s} \approx 419 \text{ jours}$$

Toutefois, notre satellite doit parcourir seulement une demi-orbite de transfert, ainsi nous trouvons une durée du transfert égale à 210 jours.

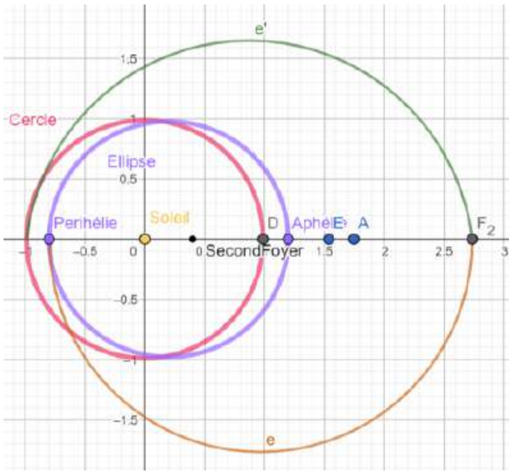
3 - TRANSFERT BI-ELLIPTIQUE

3.1) Principe :

Il existe enfin une troisième méthode couramment utilisée pour passer d'une orbite à une autre, qu'il est donc intéressant d'appliquer à notre cas, le transfert bi-elliptique. Ce type de transfert est en réalité très similaire au transfert de Hohmann dans les calculs qui lui sous tendent mais, comme son nom l'indique, on parcourt ici deux demi-ellipses de transfert au lieu d'une seule (voir image ci-dessous). Les manœuvres restent comme pour Hohmann tangentes à la trajectoire, et on se place toujours au périhélie ou à l'aphélie au moment de les effectuer, mais elles sont au nombre de 3 au total pour chaque transfert (au lieu de 2 pour Hohmann).



Transfert n°1



Transfert n°2

Le point nommé F sur l'image est cependant variable, c'est pourquoi on a choisi d'étudier la méthode bi elliptique à l'aide d'un tableur, pour plusieurs valeurs possibles de la distance entre le Soleil (foyer) et ce point F, que l'on nomme d.

3.2) Calculs avec un tableur

Comme pour Hohmann, on à choisi d'étudier deux configurations différentes du bi elliptique (voir ci-dessus), en arrivant à l'aphélie ou bien au périhélie de l'orbite elliptique finale.

Transfert n°1

Point variable (*d* en UA)	DeltaV_1	DeltaV_2	DeltaV_3	Del taV_TOT	Hohmann 2 (moins energétique)
1	0,07501790772	1,397457384	-1,602994609	3,075469901	2,93246421
1,1	0,7766121643	1,366389204	-2,269785488	4,412786856	2,93246421
1,2	1,400497088	1,334662888	-2,86663	5,601789975	2,93246421
1,3	1,959230881	1,302872344	-3,404367531	6,666470756	2,93246421
1,4	2,462739084	1,271414685	-3,891633892	7,62578766	2,93246421
1,5	2,918985415	1,240552817	-4,335411003	8,494949235	2,93246421
1,6	3,334443341	1,210457075	-4,741415539	9,286315956	2,93246421
1,7	3,71443539	1,181233423	-5,114380228	10,01004904	2,93246421
1,8	4,063382235	1,152942841	-5,45826162	10,6745867	2,93246421
1,9	4,384988798	1,12561482	-5,776396239	11,28699986	2,93246421
2	4,682385442	1,099256861	-6,071619773	11,85326208	2,93246421
2,1	4,958236584	1,073861202	-6,3463593	12,37845709	2,93246421
2,2	5,214825269	1,049409628	-6,602705513	12,86694041	2,93246421
2,3	5,454119769	1,025876921	-6,842469922	13,32246661	2,93246421
2,4	5,677826556	1,003233336	-7,067230595	13,74829049	2,93246421
2,5	5,887432819	0,9814463914	-7,278369073	14,14724828	2,93246421
2,6	6,084240892	0,9604821484	-7,477100406	14,52182345	2,93246421

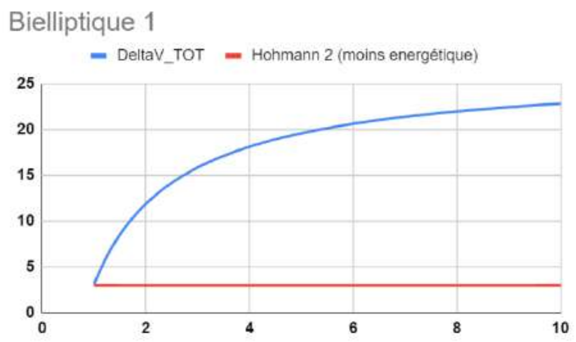
2,7	6,269396328	0,9403061312	-7,664497781	14,87420024	2,93246421
2,8	6,443910981	0,9208839786	-7,841512858	15,20630782	2,93246421
2,9	6,608682088	0,9021819008	-8,008992665	15,51985665	2,93246421
3	6,764508158	0,8841669929	-8,167693727	15,81636888	2,93246421
…	…	…	…	…	…

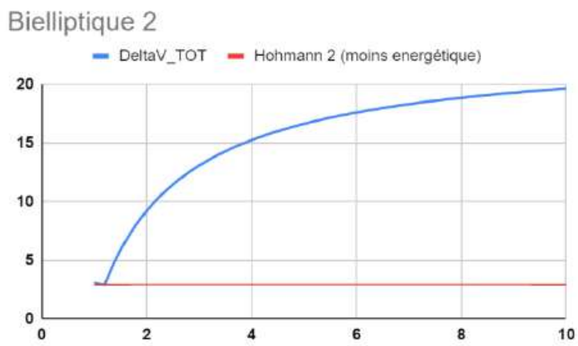
Transfert n°2

Point variable (*d* en UA)	**DeltaV_1**	**DeltaV_2**	**DeltaV_3**	**DeltaV_TOT**	**Hohmann 2 (moins énergétique)**
1	0,07501790772	-1,626300574	1,375205535	3,076524017	2,93246421
1,1	0,7766121643	-1,578703863	0,6448247356	3,000140763	2,93246421
1,2 (9)	1,400497088	-1,531967112	1,312585596E-10	2,9324642	2,93246421
1,3	1,959230881	-1,48655513	-0,5737316521	4,019517663	2,93246421
1,4	2,462739084	-1,442732606	-1,087693078	4,993164768	2,93246421
1,5	2,918985415	-1,40063543	-1,550888542	5,870509387	2,93246421
1,6	3,334443341	-1,360316329	-1,9705765	6,66533617	2,93246421
1,7	3,71443539	-1,321774549	-2,3526784	7,38888834	2,93246421
1,8	4,063382235	-1,284975385	-2,702076423	8,050434043	2,93246421
1,9	4,384988798	-1,249863138	-3,022834207	8,657686143	2,93246421
2	4,682385442	-1,216369772	-3,318363077	9,217118292	2,93246421
2,1	4,958236584	-1,18442069	-3,591548985	9,734206258	2,93246421
2,2	5,214825269	-1,153938588	-3,844850676	10,21361453	2,93246421
2,3	5,454119769	-1,124846002	-4,080376481	10,65934225	2,93246421
2,4	5,677826556	-1,097066962	-4,299945	11,07483852	2,93246421
2,5	5,887432819	-1,070528037	-4,505133521	11,46309438	2,93246421
2,6	6,084240892	-1,045158967	-4,697316982	11,82671684	2,93246421
2,7	6,269396328	-1,020893006	-4,877699583	12,16798892	2,93246421
2,8	6,443910981	-0,9976670696	-5,047340618	12,48891867	2,93246421
2,9	6,608682088	-0,9754217577	-5,207175735	12,79127958	2,93246421
3	6,764508158	-0,9541012867	-5,358034542	13,07664399	2,93246421
…	…	…	…	…	…

Les formules utilisées et les calculs menés sont tout à fait analogues à ceux utilisés précédemment pour la méthode de Hohmann, mais plus nombreux puisque l'on parcourt deux demi-ellipses. Il en est de même pour les calculs des excentricités et des demi-grands axes des ellipses de transfert.

Si l'on effectue les calculs pour ces deux configurations, pour des valeurs de la distance d allant de 1 UA à 10 UA par pas de 0,1 UA, et que l'on trace une courbe de tendance correspondant aux résultats obtenus on obtient ce qui suit :





On compare ici l'énergie totale dépensée pour le transfert bi elliptique au deuxième transfert de Hohmann étudié, qui est le moins énergivore des deux. On remarque immédiatement que cette méthode n'est donc pas envisageable dans notre cas, elle consomme toujours plus d'énergie et est plus lente (car on parcourt une distance bien plus importante). On conclut donc que le transfert bi-elliptique n'est pas adapté à la configuration du transfert que l'on étudie.

4 – CONCLUSION

On peut ainsi tirer quelques conclusions de l'étude menée. Tout d'abord, on voit bien que pour réaliser un transfert orbital le compromis est à chercher entre la durée de ce transfert et l'énergie nécessaire à sa réalisation. En effet, on peut rappeler ici les résultats obtenus pour les 3 transferts étudiés :

- Méthode à manœuvre unique: $\Delta V_{tot} \approx 6{,}097$ km/s et transfert de fait instantané
- Hohmann 1 : $\Delta V_{tot} \approx 3{,}0847$ km/s et 155 jours pour réaliser le transfert
- Hohmann 2 : $\Delta V_{tot} \approx 2{,}9325$ km/s et 210 jours pour réaliser le transfert

Si l'on dépense plus d'énergie on peut donc transférer le satellite d'une orbite à l'autre plus rapidement, mais cela sera donc plus coûteux en termes de carburant utilisé pour la propulsion, qui aura lui même rendu le lancement du satellite plus coûteux en ajoutant de la masse à la charge utile envoyée en orbite. Le choix du type de transfert va donc dépendre essentiellement de l'application du satellite en question. On peut imaginer que s'il s'agit d'un satellite militaire ou bien d'un module habité le facteur temporel peut peser plus dans le choix, alors que ce n'est pas forcément le cas d'un télescope spatial par exemple.

Quelques nuances sont cependant à apporter à notre étude. Tout d'abord, les transferts de type Hohmann que l'on a étudiés ne sont pas les seuls possibles, d'autres résultats sont donc envisageables.

De plus, dans notre bilan de la consommation énergétique de chaque transfert n'apparaissent pas les impulsions des systèmes dits “à gaz froids” (cf image ci-dessous).

Ces petits systèmes de propulsions servent à orienter le satellite afin de diriger la poussée du moteur principal dans la bonne direction. Pour la méthode à manœuvre unique, la consommation de ces systèmes sera moindre puisque la correction ne sera que de quelques degrés, alors que pour les transferts de Hohmann il faut tourner le satellite de $180°$ plusieurs fois puisqu'il doit d'abord accélérer puis décélérer (ou bien inversement) comme on a pu le voir précédemment. La méthode de Hohmann va donc vider bien plus les réservoirs de gaz froids *(souvent argon, azote ou autre gaz inerte)*, d'autant plus que pour chaque impulsion donnée, une deuxième de même direction, même force, et sens contraire est nécessaire pour éviter que le satellite tourne sur lui-même indéfiniment, car dans l'espace les frottements sont pratiquement nuls.

Notes d'édition

(1) Voir par exemple l'article "Lois de Kepler" de Wikipedia.

(2) Voir aussi le paragraphe 2.3 "Approche énergétique" et la note 7 ci-dessous.
La valeur de μ, 132 712 440 018 km^{3}s^{-2}est donnée au paragraphe 1.4.

(3) Les distances a et r étant exprimées en UA, alors que les vitesses sont exprimées en km/s, il faut exprimer μ en UA$\times$ (km/s)^2 dans les calcul suivants. La valeur de l'UA utilisée ici est légèrement inférieure à 150 millions de km, ce qui explique la différence entre les vitesses sur le cercle trouvées ici et au paragraphe 2.

(4) Dans le premier schéma ci-dessous, l'orbite de transfert part du cercle pour y revenir. Il faut plutôt considérer les schémas donnés ensuite pour chacun des transferts envisagés.

(5) Bien sûr, le Soleil est toujours au foyer de l'ellipse de transfert, d'où les valeurs $ra_{Transf_1} = 0{,}99$ et $rp_{Transf_1} = 0{,}8$ UA.

(6) Pour chaque manœuvre, le ΔV donne l'impulsion à donner au satellite en multipliant par sa masse, et c'est cela (et non la variation d'énergie cinétique) qui détermine la quantité de carburant nécessaire. D'où l'importance du paramètre ΔV_{tot} .

(7) L'énergie cinétique est liée à la vitesse par la formule $Ec = \frac{1}{2}mv^2$, où m est la masse de l'objet, ici le satellite. Dans la formule ci dessous, on a simplifié par m qui ne varie pas, et $Ep = -\frac{\mu}{r}$ représente l'énergie *potentielle*, égale au travail de la force de gravitation pour amener le satellite à l'infini (qui est indépendant du chemin parcouru).
La somme $Ec + Ep$ est constante, d'après le principe de conservation de l'énergie, d'où $v^2 = \frac{2\mu}{r} + C$, où C est une constante. Pour trouver la valeur de cette constante, on peut appliquer la loi des aires à l'aphélie et au périhélie, où la vitesse est orthogonale au rayon vecteur, ce qui donne $r_{apo} \cdot v_{apo} = r_{per} \cdot v_{per}$; en élevant au carré

$$r_{apo}^2 v_{apo}^2 = a^2(1+e)^2\left(\frac{2\mu}{a(1+e)} + C\right) = r_{per}^2 v_{per}^2 = a^2(1-e)^2\left(\frac{2\mu}{a(1-e)} + C\right),$$

d'où il vient $C = -\frac{\mu}{a}$ et l'expression de la vitesse.

(8) La constante $G \times M_{Soleil}$ n'est autre que la constante μ utilisée jusqu'ici comme indiqué plus haut. Dans le calcul, les distances sont données en km, M_{Soleil} en kg, et G en km^{3}s^{-2}kg^{-1}. Il est toutefois à noter que G et M_{Soleil} sont connus avec moins de précision que μ ne l'est directement.

(9) Lorsque $d = 1{,}2$ dans le transfert bi-elliptique n°2, le point F se trouve à l'aphélie de l'ellipse d'arrivée (voir le schéma). La seconde ellipse de transfert est alors confondue avec l'ellipse d'arrivée et on est en réalité dans le cas d'un transfert de Hohmann mono-elliptique (transfert n°2 aussi). La valeur donnée pour DeltaV_3 est due aux arrondis de calcul, elle devrait être nulle.