Les poids cassés

Année 2022 – 2023

Malo Chastellier, Marin Dezieix, Gaspard Dinand, Lisa Proust, élèves de 4ème
Maëlane Marchais et Jeanne Moynet, élèves de 2nde

Établissements : Collège Hélène de Fonsèque et Lycée du Pays d'Aunis à Surgères (17)

Encadré·es par : Romain Torchia et Gaëtan Prévaud

Chercheur : Gilles Bailly-Maître, Université de La Rochelle

1. Présentation du sujet

Nicolas, le marchand, possède un poids de 40 kg. Il le laisse malencontreusement tomber et celui-ci se brise en 4 morceaux.
Chaque morceau pèse un nombre entier de kilos.

Problème 1 : en utilisant astucieusement ces morceaux, Nicolas peut mesurer toutes les masses à partir de 1 kg et jusqu'à 40 kg.
Quelle est la masse de chaque morceau ?

Problème 2 : avec un poids de 2023 kg, de combien de poids au minimum a-t-on besoin pour mesurer toutes les masses entre 1kg et 2023 kg ?

2. Réponse au problème 1

Pour mesurer toutes les masses de 1 à 40, il faut utiliser la balance Roberval. Celle-ci comporte :

- un premier plateau où l'on dépose l'objet à peser ;
- un deuxième plateau où l'on dépose des masses marquées.

Lorsque l'équilibre est atteint, la masse de l'objet est donnée par la somme des masses marquées.
Pour résoudre le problème, nous avons décidé de placer l'objet à peser à droite et les masses sur le plateau de gauche et/ou de droite : à gauche on additionne les masses marquées et à droite on les soustrait. On peut ne pas utiliser toutes les masses et donc on en mettre de côté. Cette méthode permet de calculer simplement n'importe quelle masse à partir de nos 4 masses marquées.

Le résultat du premier problème posé, est 1 ; 3 ; 9 et 27.

Remarque : nous avons remarqué que les nombres de notre solution étaient des puissances de 3 (car on a trois fonctions : soustraire, ajouter, ne pas s'en servir, et ceci pour chaque masse) :

$$1=3^0 \ ; \ 3=3^1 \ ; \ 9=3^2 \ ; \ 27=3^3.$$

3. Réponse au problème 2

Conjecture : en vue de notre remarque sur les puissances de 3, nous avons cherché les prochaines puissances. Celle qui suivait 27 donc 3^3 était 81, suivi de 243 et 729. Si l'on continue avec ce système, nous dépassons 2023.

Méthode utilisée : dans le problème 1, les masses suivantes s'obtiennent en effectuant les calculs suivants :

$$(1+3+9)\times 2+1=27 \ ; (1+3+9+27)\times 2+1=81.$$

Cela nous a conduit à utiliser la propriété suivante.

Propriété : pour trouver la masse suivante, appelée *pivot*, il suffit d'ajouter toutes les masses précédentes puis de multiplier la somme par deux et d'ajouter 1.

Preuve : *Pour trouver* 81*, nous nous sommes dit qu'il fallait donc un nombre qui lorsqu'on lui soustrait* 40 *(ce que nous sommes déjà capables de faire) fasse* 41*. Soit l'équation à résoudre :* $m - 40 = 41$*. D'où* $m = 40+41 = 81$*. Donc on obtient le pivot suivant.*
Et ainsi de suite…

Toutes les masses qui permettent d'obtenir 40 *sont* 1 ; 3 ; 9 ; 27 *ce qui s'écrit aussi* 3^0 ; 3^1 ; 3^2 ; 3^3

Si on ajoute toutes ces masses alors on peut écrire : $\begin{array}{r} 3^0 \\ +3^1 \\ +3^2 \\ +3^3 \end{array}$

Puis on multiplie cette somme par deux alors on a

$$2(3^0+3^1+3^2+3^3)$$

Puis on ajoute 1, ce qui donne

$$2(3^0+3^1+3^2+3^3)+1$$

Pourquoi cette suite d'opérations nous donne la masse suivante (qui est la puissance 3 suivante) ?
On peut le démontrer en utilisant la formule suivante (qui est au programme de première).

On sait que

$$\begin{array}{rl} & q^0 \\ + & q^1 \\ + & q^2 \\ + & q^3 \\ + & . \\ & . \\ & . \\ + & q^n \\ = & \dfrac{q^{n+1}-1}{q-1} \end{array}$$

Appliquons à $\begin{array}{r} 3^0 \\ +3^1 \\ +3^2 \\ +3^3 \end{array}$*, on obtient*

$$\begin{array}{rl} & 3^0 \\ + & 3^1 \\ + & 3^2 \\ + & 3^3 \\ = & \dfrac{3^{3+1}-1}{3-1} \\ = & \dfrac{3^4-1}{2} \end{array}$$

Donc $$2(3^0+3^1+3^2+3^3)=2\times(\frac{3^4-1}{2}) \Leftrightarrow 2(3^0+3^1+3^2+3^3)=3^4-1$$

$$2(3^0+3^1+3^2+3^3)+1=3^4-1+1 \Leftrightarrow 2(3^0+3^1+3^2+3^3)+1=3^4$$

Ce qui explique pourquoi lorsque l'on multiplie la somme de toutes les masses par deux et que l'on ajoute 1*, on obtient le pivot suivant (la puissance de* 3 *suivante).*

Finalement, la suite de nombres obtenus par ce procédé est : 1 ; 3 ; 9 ; 27 ; 81 ; 243 et 729

En faisant la somme, on obtient $1+3+9+27+81+243+729=1093$.

Il ne nous manque plus qu'à déterminer le reste : $2023-1093=930$.

La réponse est 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729 et 930 (930 n'est pas une puissance de 3, c'est le reste).

La réponse à la question est donc 8 nombres.

Remarque : la puissance de trois suivante vaut $3^7 = 2\ 187$. La plus grande masse qu'il est possible d'atteindre avec 8 poids est 3 280 kg.
En effet, $1+3+9+27+81+243+729+2187=3\,280$.