Ce diaporama est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis et imperfections,
autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

Le plus court chemin sur une sphère

Année 2022 - 2023

Elèves :

Aymen Bouaouaja : troisième
Ali Laghouane et Djawad Benbelaid : première
Rayan Laghouane : terminale

Encadrants :

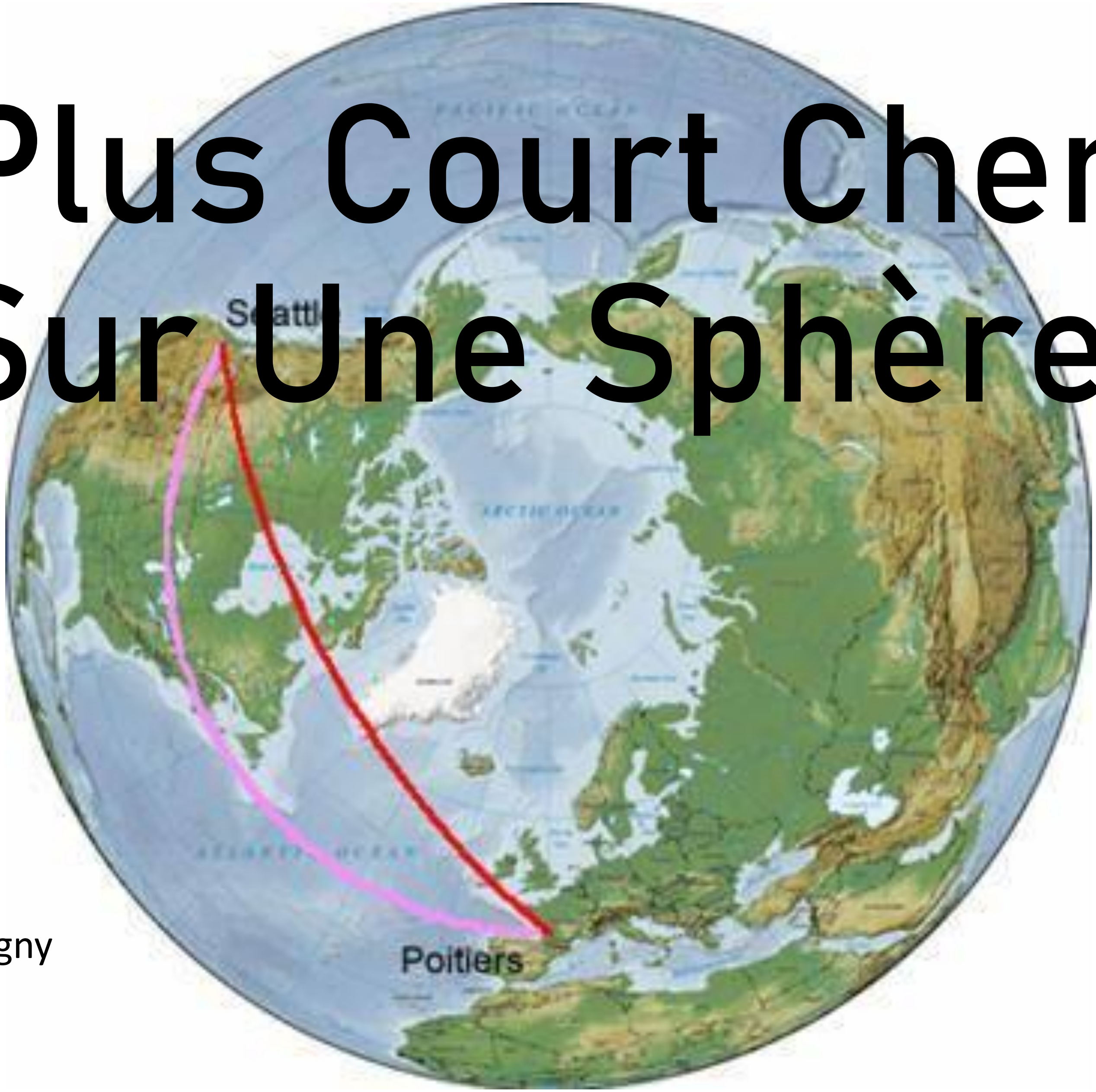
François Gaudel, chercheur
Bruno Panazzolo, professeur

Etablissements :

Association Science Ouverte
Atelier de Bobigny

Année 2022- 2023

Le Plus Court Chemin Sur Une Sphère



Atelier de Bobigny

Ali Laghouane
Rayan Laghouane
Aymen Bouaouaja
Djawad Benbelaid

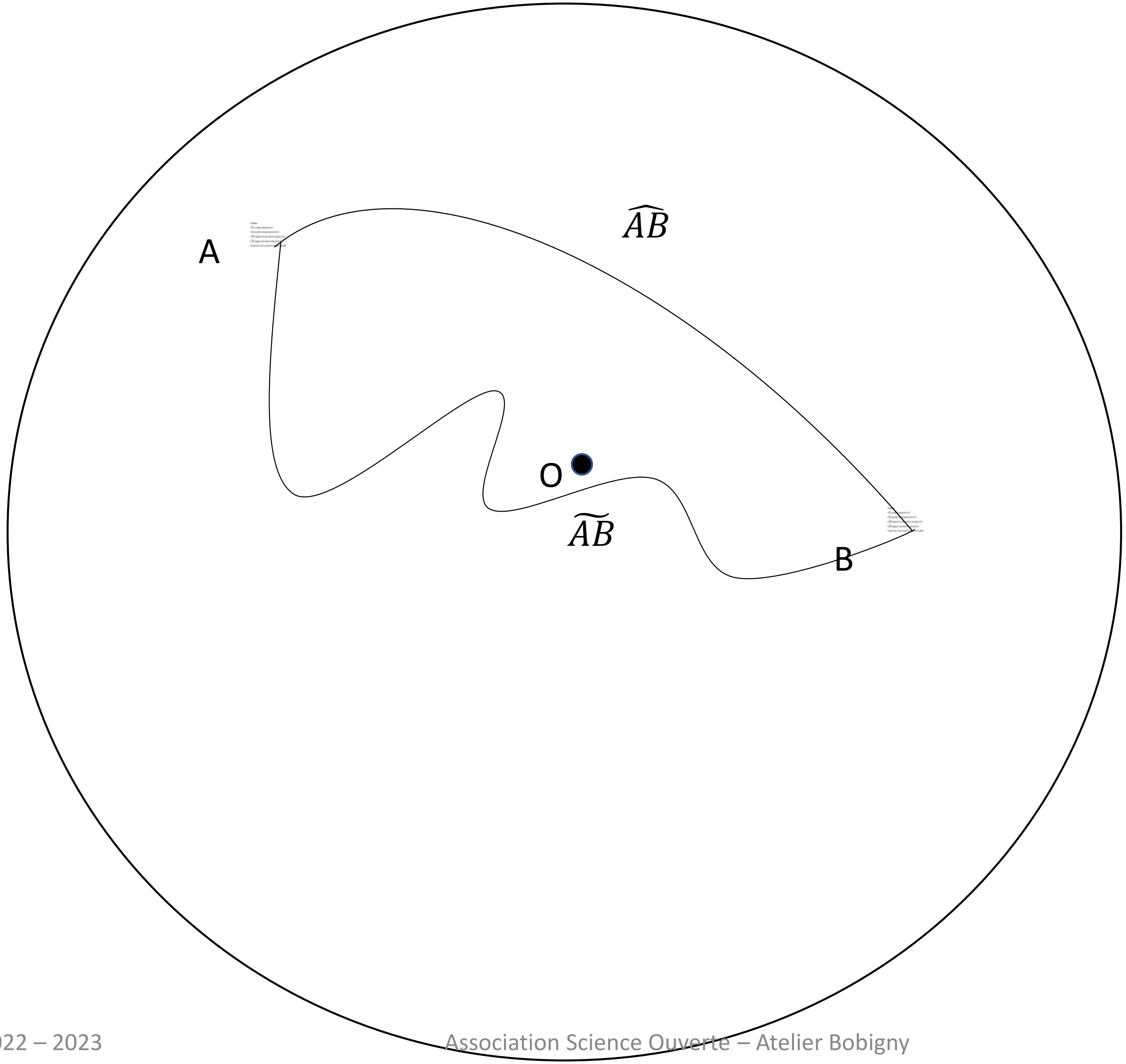
- Problème :
- On cherche un chemin, le plus court sur une sphère pour joindre deux points A et B de cette sphère
- On appelle O le centre de la sphère
- On admet qu'un plus court chemin existe

Notre conjecture :

Sauf quand les points sont aux antipodes l'un de l'autre, le plus court chemin de A à B est le plus petit des deux arcs de grands cercles joignant A et B.

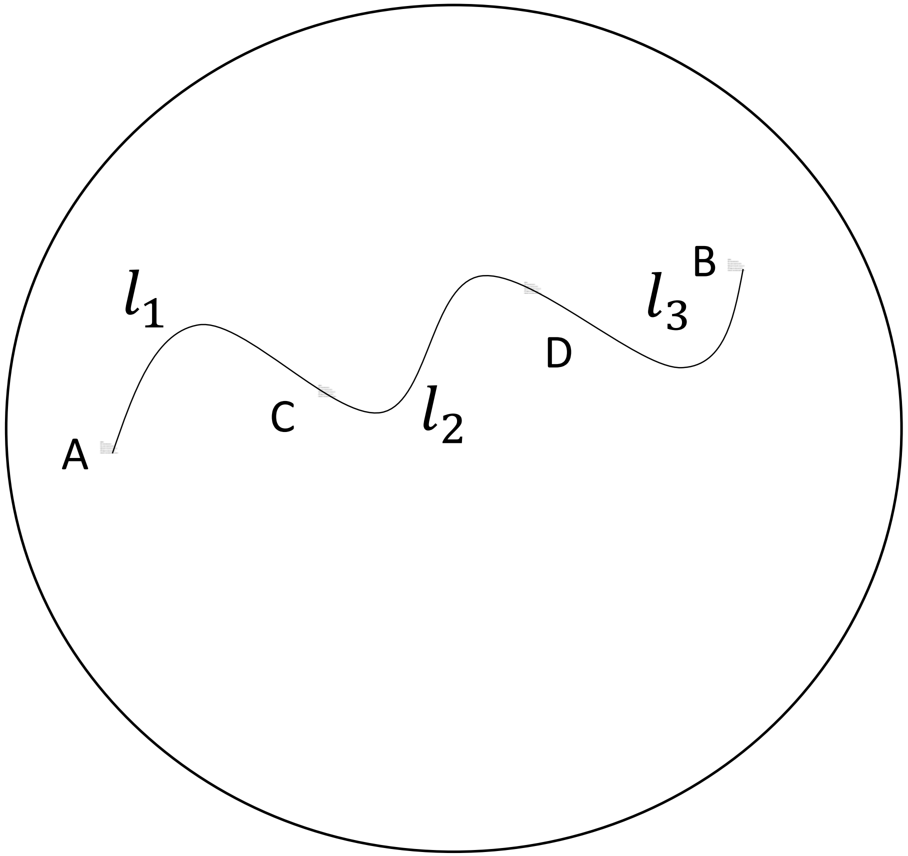
S'ils sont aux antipodes, les deux arcs de grand cercle conviennent.

- Notations :
- $\widetilde{AB}$: un chemin minimal de A à B
- $\widehat{AB}$: plus petit arc de grand cercle de A à B
- $\left|\widehat{AB}\right|$: longueur d’un plus petit arc de grand cercle
- $\left|\widetilde{AB}\right|$: longueur d’un chemin minimal de A à B
- Grand cercle : c’est un cercle de centre O sur la sphère


A
$\widehat{AB}$
O
$\widetilde{AB}$
B

- Nous avons montré que si $\widetilde{AB}$ est minimum, alors tout sous-chemin de $\widetilde{AB}$ est minimum.

- On note :
- l_1= longueur de l'arc de courbe AC
- l_2 =longueur de l'arc de courbe CD
- l_3 =longueur de l'arc de courbe DB

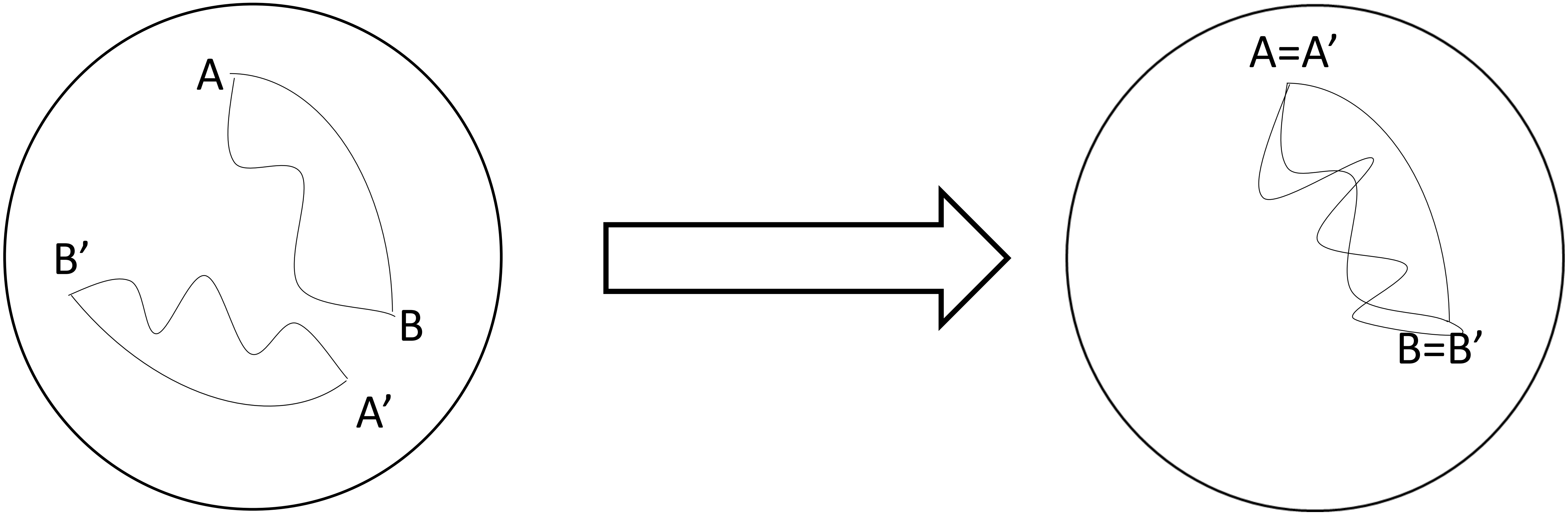


On a:

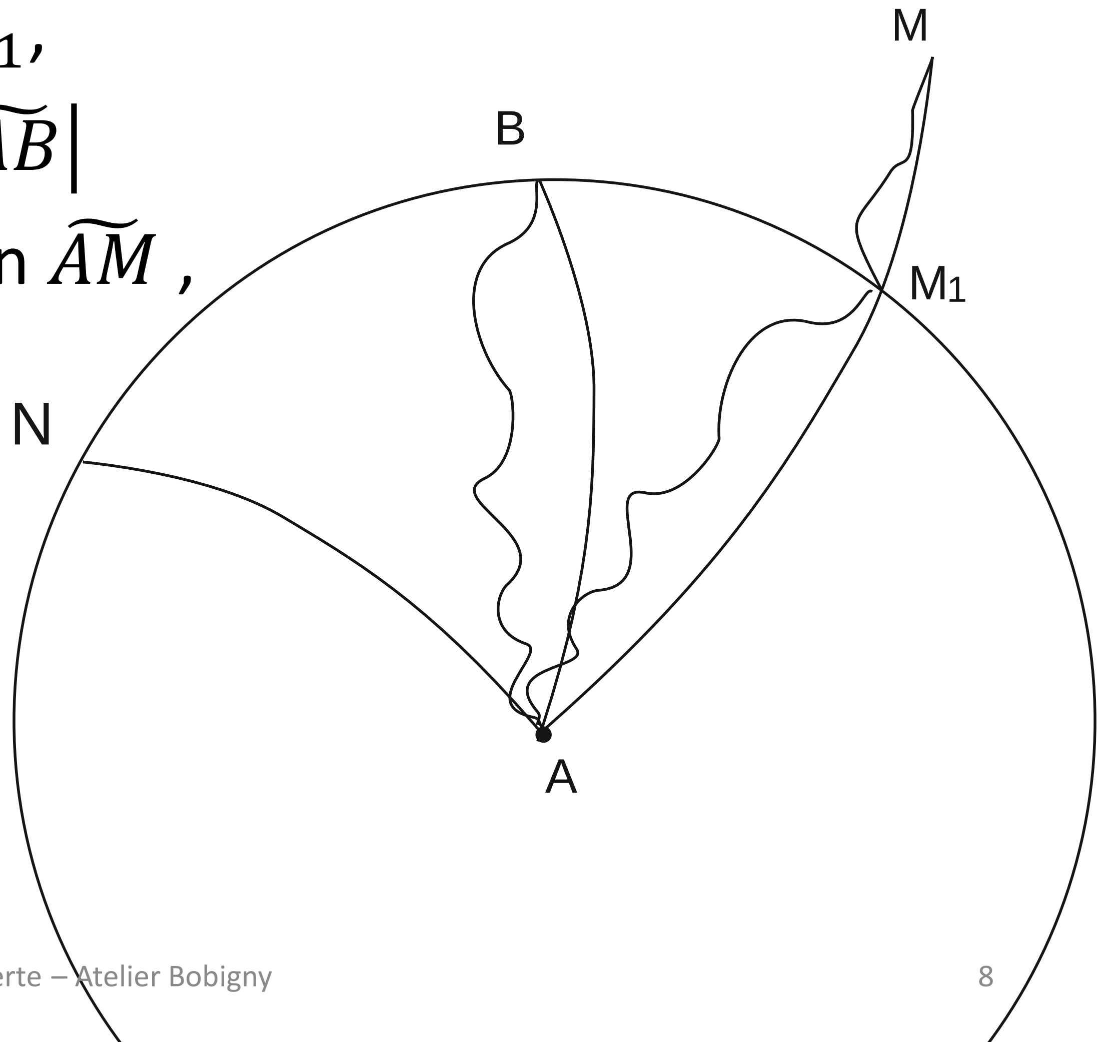
- $\left|\widetilde{AB}\right|$ = $l_1 + l_2 + \ l_3$ car les longueurs s'ajoutent.
- S'il existait un trajet plus court de C à D, de longueur l'_2 il permettrait de fabriquer un chemin de longueur $l_1 + l'_2 + \ l_3$, donc plus court, de A à B, ce qui n'est pas possible car $\widetilde{AB}$ est minimal.

- On remarque que si $\left|\widehat{AB}\right| = \left|\widehat{A'B'}\right|$ alors $\left|\widetilde{AB}\right| = \left|\widetilde{A'B'}\right|$ car il existe une transformation de la sphère qui conserve les longueurs envoyant A en A' et B en B'.

Note d'édition : Autrement dit, par une rotation de la sphère, A devient A' et B devient B'.

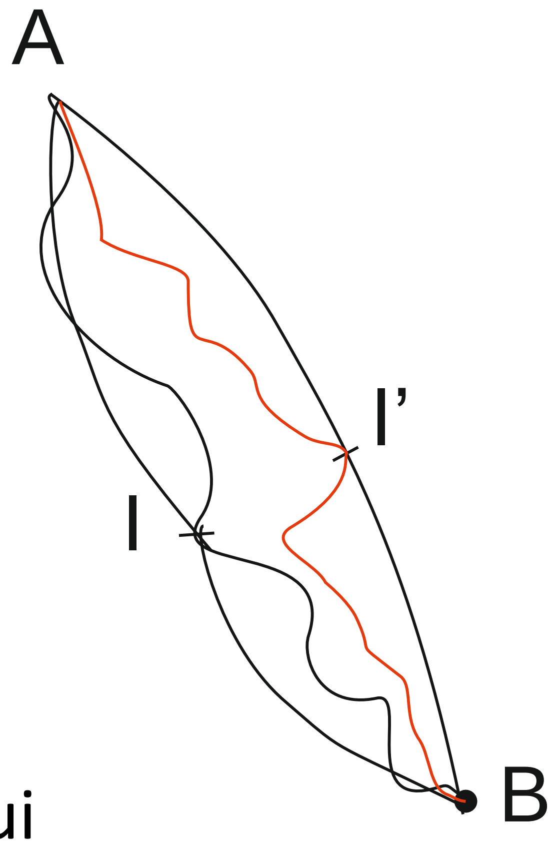


- Si M est tel que $\left|\widehat{AM}\right| > \left|\widehat{AB}\right|$ alors $\left|\widetilde{AM}\right| > \left|\widetilde{AB}\right|$
- En effet M est à l’extérieur du petit cercle (C) constitué de tous les points *N* tels que $\left|\widehat{AN}\right| = \left|\widehat{AB}\right|$;
- $\left|\widetilde{AM}\right|$ coupe donc ce cercle en un point M_1,
- Et comme $\left|\widehat{AM_1}\right| = \left|\widehat{AB}\right|$, alors $\left|\widetilde{AM_1}\right| = \left|\widetilde{AB}\right|$
- Comme M est au delà de M_1 sur le chemin $\widetilde{AM}$,
- $\left|\widetilde{AM}\right| = \left|\widetilde{AM_1}\right| + \left|\widetilde{M_1 M}\right| = \left|\widetilde{AB}\right| + \left|\widetilde{M_1 M}\right|$
- Donc $\left|\widetilde{AM}\right| > \left|\widetilde{AB}\right|$.

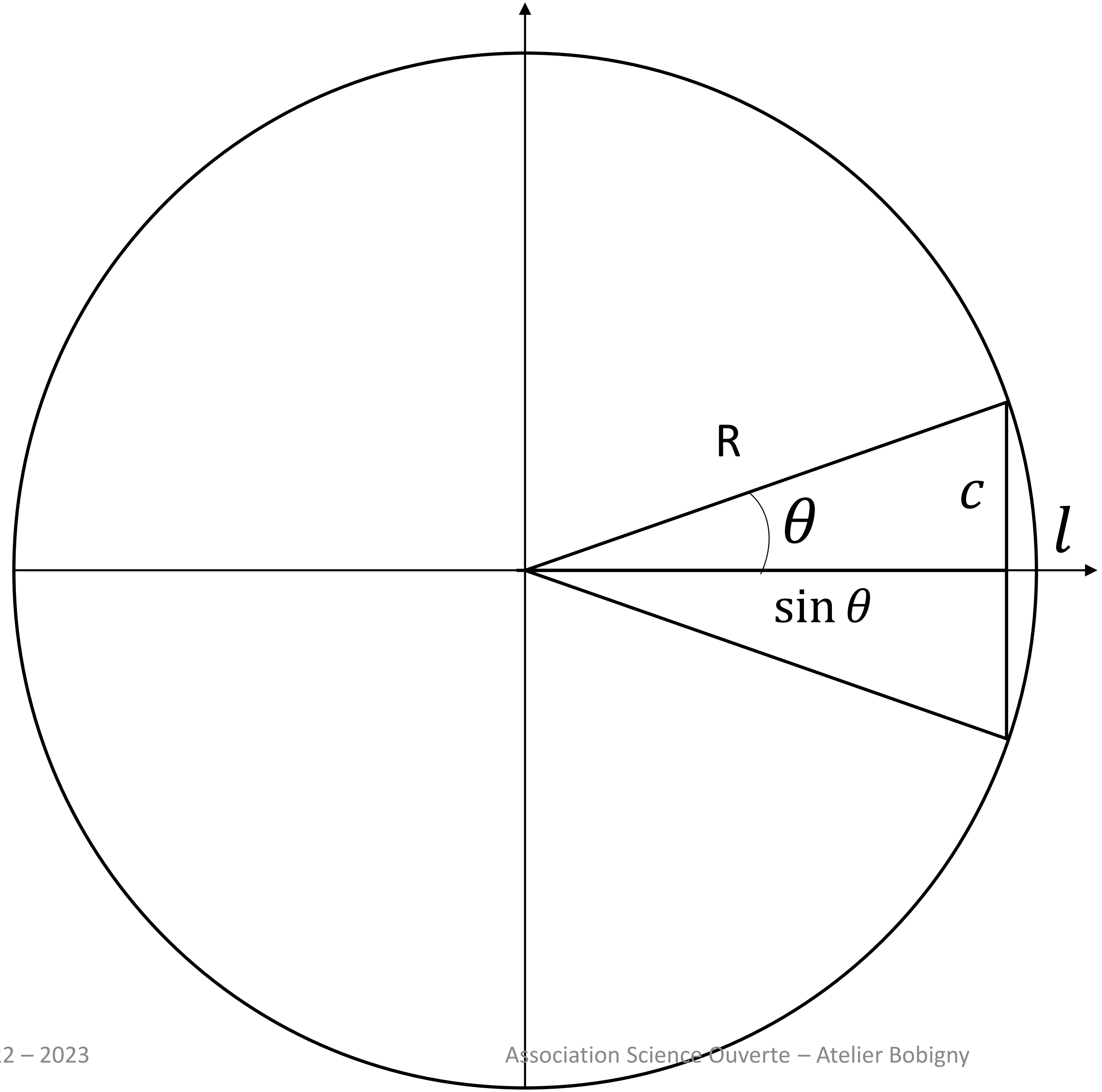


- Conséquence :
- $\left|\widehat{AM}\right| = \left|\widehat{AB}\right|$ équivaut à $\left|\widetilde{AM}\right| = \left|\widetilde{AB}\right|$
- En effet on a déjà vu que $\left|\widehat{AM}\right| = \left|\widehat{AB}\right|$ implique $\left|\widetilde{AM}\right| = \left|\widetilde{AB}\right|$
- Et réciproquement une inégalité entre $\left|\widetilde{AM}\right|$ et $\left|\widetilde{AB}\right|$, quel que soit son sens, entraîne la même inégalité entre $\left|\widehat{AM}\right|$ et $\left|\widehat{AB}\right|$.

- Soit maintenant un point I situé au milieu d'un chemin minimal quelconque $\widetilde{AB}$. Les chemins $\widetilde{AI}$ et $\widetilde{IB}$ ayant la même longueur, il en est de même des arcs $\widehat{AI}$ et $\widehat{IB}$.
- On a donc, d'après l'inégalité triangulaire appliquée aux arcs, $\left|\widehat{AI}\right| \geq \frac{1}{2}\left|\widehat{AB}\right|$.
- Mais si $\left|\widehat{AI}\right| > \frac{1}{2}\left|\widehat{AB}\right|$, appelons I' le point de $\widehat{AB}$ tel que $\left|\widehat{AI'}\right| = \left|\widehat{AI}\right|$
- On a $\left|\widehat{I'B}\right| < \left|\widehat{IB}\right|$ donc $\left|\widetilde{I'B}\right| < \left|\widetilde{IB}\right|$
- Le trajet de A à B est constitué des chemins minimaux $\widetilde{AI'}$ et $\widetilde{I'B}$ on a donc une longueur inférieure strictement à $\widetilde{AB}$ ce qui n'est pas possible. Donc $\left|\widehat{AI}\right| = \frac{1}{2}\left|\widehat{AB}\right|$.



- On peut subdiviser tout chemin minimal $\widetilde{AB}$ en 2^n sous chemins tous égaux , aussi petits qu'on veut (il suffit de prendre n suffisamment grand), et de même pour $\widehat{AB}$. Les rapports des longueurs prises sur $\widetilde{AB}$ et $\widehat{AB}$ ne changent pas.
- Par continuité (nous l'admettons), il en résulte que la longueur d d'un chemin minimal $\widetilde{AB}$ est proportionnelle à la longueur l de l'arc de grand cercle $\widehat{AB}$, dans un rapport indépendant de A et B : $k = \frac{d}{l}$.


R
c
θ
l
$\sin\theta$

- On va montrer que $k = 1$
- La longueur c de la corde $[AB]$ est inférieure à d , car on est dans un espace euclidien où le plus court chemin entre deux points est le segment qui les joint.
- Si R est le rayon de la sphère, c est égale à $2R\sin\frac{l}{2R}$
- d≤ l, par hypothèse
- Donc $\frac{c}{l}$ ≤ $\frac{d}{l}$= k ≤1
- Mais $\frac{c}{l}$ tend vers 1 quand $|\widehat{AB}|$ tend vers 0 car $\frac{c}{l}$=$\frac{2R\sin\frac{l}{2R}}{l}$ et

$\frac{2R\sin\frac{l}{2R}}{l}$ = $\frac{\sin\frac{l}{2R}}{\frac{l}{2R}}$ de la forme $\frac{\sin x}{x}$. Donc k=1.

- Nous voyons donc que les arcs de grands cercles sont des chemins minimaux.
- L’inégalité triangulaire permet de montrer l’unicité (sauf pour les points aux antipodes les uns des autres). En effet, si un chemin minimal de A à B passe par un point M extérieur à l’arc $\widehat{AB}$, sa longueur est égale à celle de $\widehat{AM}$ plus celle de l’arc $\widehat{MB}$, dont la somme est strictement supérieur à celle de $\widehat{AB}$ d’après l’inégalité triangulaire.