La forêt infinie

Année 2022 – 2023

Vico Che-He, Mathias Traore, Louis Vey, élèves de seconde

Établissement : Lycée Pierre-Gilles de Gennes, en jumelage avec le lycée Gabriel Fauré

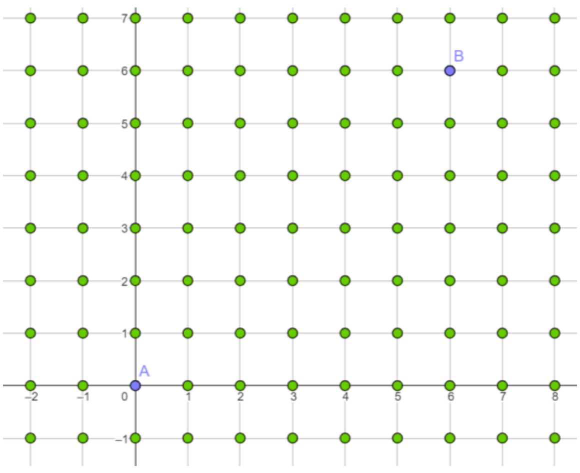
Enseignant : Yohann Moreau, Nathalie Fromager

Chercheuse : Catherine Gille, Université Paris Cité

1. Présentation du sujet

On considère une forêt infinie dans un plan bidimensionnel. Pour la représenter, on imagine un quadrillage invisible, où sur chaque nœud il y a un arbre. Sur chaque arbre il y a un coucou. Les arbres bloquent la vue des coucous.
Note : les coucous n'ont pas d'épaisseur. Ils sont représentés mathématiquement par des points.

Représentation de la forêt sur *GeoGebra* (Une image vaut mille mots)



Tout d'abord, nous avons choisi un repère pour calculer. Ce repère sera orthonormé, et tel que tous les coucous aient des coordonnées entières. L'origine de ce repère sera l'un des coucous (souvent nommé $A(0; 0)$).

2. Résultats

[si votre article est un peu long, annoncez ici les principaux résultats et conjectures obtenus]

La première question à laquelle nous avons répondu a été "à quelle condition deux coucous peuvent-ils se voir". Nous avons traité de la question avec Thales où il fallait trouver si un triangle avec un agrandissement de rapport **0** à **1** (plus petit) et nous prouvés que si deux coordonnées d'un coucou sont premières entre elles alors les coucous se voient

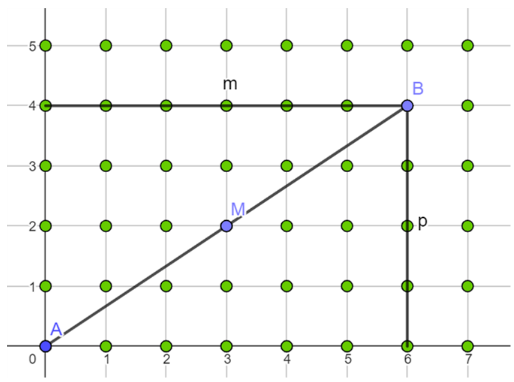
La deuxième question que nous avons répondue fut " Existe-t-il une direction dans laquelle un coucou ne voit aucun coucou" bien que le titre est compliqué la réponse et simple oui si on considère que sa vue est une droite tel que $y = ax$ avec a irrationnel

3. Démonstrations

3.1. À quelle condition deux coucous peuvent-ils se voir ?

Ce qu'on veut prouver : Les coucous se voient équivaut à m et p sont premiers entre eux.
Soit un coucou $A(0;0)$, et un autre coucou $B(m;p)$, avec $m \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$ (si nécessaire on change le sens des axes ! mais ce n'est peut-être pas nécessaire). D'abord on veut montrer que si m et p ne sont pas premiers entre eux, alors les coucous ne se voient pas. Preuve : Si m et p ne sont pas premiers entre eux, alors on peut les diviser par leur diviseur commun (qu'on appelle k) et on trouvera $\frac{m}{k}$ et $\frac{p}{k}$ entiers. Le point $M(\frac{m}{k};\frac{p}{k})$ bloque la vision des deux coucous car $k\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires. (Pour l'ordre AMB, c'est car $0 < \frac{m}{k} < m$ ainsi que $0 < \frac{p}{k} < p$.)

Si m et p ne sont pas premiers entre eux, alors on peut les diviser…



On a démontré que si m et p ne sont pas premiers entre eux, alors les coucous ne se voient pas. Donc par contraposée, on vient de démontrer que si les coucous se voient alors m et p sont premiers entre eux.
Si m et p sont premiers entre eux, alors il n'existe pas de point $M(m';p')$ avec $m' \in \mathbb{N}; p' \in \mathbb{N}$ et qui soit dans [AB]. S'il existait, alors cela impliquerait la colinéarité des vecteurs : $\exists k\ ; k\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} km' \\ kp' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix}$. Alors k doit satisfaire $\begin{cases} km' = m \\ kp' = p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m' = m/k \\ p' = p/k \end{cases}$ et donc si $m/k = m'$, m et p n'ayant aucun diviseur commun, $p/k = p'$ n'est pas entier ; et vice versa. Or il faut que p' soit entier ; par conséquent $M(m';p')$ n'existe pas. On vient de démontrer que si m et p sont premiers entre eux alors les coucous se voient.
L'implication vraie et la réciproque vraie, on en conclut que les coucous se voient équivaut à m et p sont premiers entre eux.

Les dessins et images doivent être légendés et lisibles.
Si possible, fournir les images dans des fichiers séparés.

3.2. Existe-il une direction dans laquelle un coucou ne voit aucun coucou ? (le champ de vue est une demi-droite)

Nous allons considérer ce champ de vue comme une droite. En effet, on peut faire une symétrie centrale avec $(0;0)$ comme centre de symétrie : ainsi par symétrie la demi-droite devient une droite.
La droite passe par l'origine, donc on peut facilement représenter la droite [par la courbe représentative d'une fonction linéaire $f(x) = ax$ donc] par l'équation réduite $y = ax$. Ce qu'on veut prouver : Le coefficient directeur est irrationnel équivaut à le coucou ne voit aucun coucou.
On a conjecturé que la droite d'équation $y = x\sqrt{2}$ ne passe par aucun point, excepté l'origine ; pour généraliser, on remplace $\sqrt{2}$ par $a \notin \mathbb{Q}$. Nous devons démontrer que pour tout point de la droite $y = ax$ on a $(x;y) \notin \mathbb{Z}^2$, à part bien sûr $(0;0)$.
Si par l'absurde $\exists(x;y) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $ax = y$ alors $a = y/x$ avec x et y entiers, donc a est rationnel. Or on sait que a n'est pas rationnel. Ainsi quel que soit les points de la droite d'équation $y = ax$, on a $(x;y) \notin \mathbb{Z}^2$. Ainsi, aucun point $(x;y)$ vérifiant $y = ax$ n'appartient

à $\mathbb{Z}^2$. La réponse à la question initiale est oui ; et il en existe une infinité, car il existe une infinité de nombres irrationnels : $\pi; 2\pi; 3\pi\ldots$
Et si le coefficient directeur était rationnel ? Soit $\frac{m}{p}$ avec $m \in \mathbb{Z}$; $p \in \mathbb{Z}^*$; alors, on peut citer un point $(x; y)$ avec $x \in \mathbb{Z}$ et $y \in \mathbb{Z}$ excepté $(0; 0)$ appartenant à la droite : $y = \frac{m}{p}x$: en prenant $x = p$ on a $y = \frac{m}{p}p = m$. Ainsi le coucou en voit un autre. Finalement, le coefficient directeur est irrationnel équivaut à le coucou ne voit aucun coucou.

3.3. à quelle condition deux coucous peuvent-ils se voir ? Extension du problème dans un espace à n dimensions.

On considère un espace à n dimensions. Soit le coucou $A(0; 0; 0; \ldots 0)$ à l'origine. Soit le coucou $B(a_1; a_2; a_3; \ldots a_n)$ aux coordonnées entières. Nous traiterons deux cas incompatibles.
Cas 1 : Si toutes les coordonnées de B avaient un diviseur commun $k \in \mathbb{N}$, alors il existe un point $M(\frac{a_1}{k}; \frac{a_2}{k}; \frac{a_3}{k}; \ldots \frac{a_n}{k})$ aux coordonnées entières, qui est dans $[AB]$. En effet, $k\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}$, donc $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.
Cas 2 : Mais si deux coordonnées (ou plus) a_x et a_y de B n'ont aucun diviseur commun (excepté que 1), alors il n'existe pas de diviseur commun $k \in \mathbb{N}$ à toutes les coordonnées de B, alors aucun coucou n'est situé dans $[AB]$. Si par l'absurde k existait (alors qu'il n'existe pas), alors soit le point $M(\frac{a_1}{k}; \frac{a_2}{k}; \frac{a_3}{k}; \ldots \frac{a_n}{k})$ dont les coordonnées sont entières. Alors $\frac{a_x}{k} * k = a_x$ donc a_x serait un diviseur de k. De même $\frac{a_y}{k} * k = a_y$ donc a_y serait un diviseur de k. Or a_x et a_y n'ont aucun diviseur commun. Par conséquent

4. Soit deux coucous choisis au hasard. Quelle est la probabilité que les deux coucous se voient ?

Cette question a germé après le congrès.

5. Conclusion [Proposition de suppression]