Les entiers remarquables

Noa Defontaine, Maël Gaumet-Vincent, Jules Kauffmann, Loris Vagner

Année 2022-2023

Établissement : Lycée Léonce Vieljeux, La Rochelle
Enseignant·es : Rachel Biton, Pierre Védérine
Chercheur : Cyrille Ospel, Université de La Rochelle

1. Résumé

Cet article a pour but la résolution du problème des entiers dits "remarquables", dans le cadre de l'atelier proposé par l'association MATh.en.JEANS. Nous traiterons ce problème par disjonction des cas et répondrons à la question initiale : Quels sont les entiers remarquables ?

2. Énoncé

Le problème s'énonce comme suit :
Un entier n est dit remarquable si il existe un multiple de n s'écrivant uniquement avec le chiffre 9 et 0 où les 9 sont placés au début et les 0 à la fin c'est-à-dire de la forme $9\dots90\dots0$:

$$0, \quad 9, \quad 90, \quad 990, \quad 999, \quad 999000000, \dots$$

Par exemple $1, 2, 3$ sont remarquables car

$$1 \times 9 = 9, \quad 2 \times 45 = 90, \quad 3 \times 3 = 9.$$

Quels sont les entiers remarquables ?

3. Définitions et notations

- ⋆ Soit Ω, l'ensemble des nombres de la forme $9\dots90\dots0$, autrement dit tous les nombres pouvant s'écrire sous les formes suivantes :

$$9 \times 10^{\alpha} \quad \text{ou} \quad 10^{\beta} - 1 \quad \text{ou} \quad (10^{\gamma} - 1) \times 10^{\theta} \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}, \quad \forall (\beta, \gamma, \theta) \in \mathbb{N}^3_*.$$

  On note ω_i un élément de l'ensemble Ω.
- ⋆ On définit κ un entier naturel non nul, comme étant un coefficient de "remarquabilité", tel que $n \times \kappa \in \Omega$.

- ⋆ Soit $\mathscr{P}$, l'ensemble des nombres premiers, on note $\mathscr{P}'$ l'ensemble des nombres premiers hors 2 et 5. Autrement dit, $\mathscr{P}' = \mathscr{P} \setminus \{2, 5\}$. De plus, on note n' le produit des nombres premiers décomposant n et appartenant à $\mathscr{P}'$, c'est à dire, $n' = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$, où α_i est un entier naturel représentant le nombre de fois où un facteur $p_i \in \mathscr{P}'$ est présent dans la décomposition de n (1).
- ⋆ On note $\varphi_{(n')}$, l'indicatrice d'Euler qui à tout entier naturel n' non nul, associe le nombre d'entiers compris entre 1 et n'(inclus) et premier avec n'. La valeur de l'indicatrice s'obtient à partir de la décomposition en facteur premier de n' :

$$\text{si } n' = \prod_{i=1}^{r} p_i^{k_i}, \text{ alors } \varphi_{(n')} = \prod_{i=1}^{r} p_{(i-1)} p_i^{k_{i-1}} = n' \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

- ⋆ On obtient avec ces notations, toutes les écritures possibles d'un entier naturel n, i.e : une forme générale : $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i} \times 2^a \times 5^b \Leftrightarrow n = n' \times 2^a \times 5^b$. Et trois cas particuliers :

  1. $n = 2^a \times 5^b \quad \forall (a, b) \in \mathbb{N}^2$.
  2. $n \in \mathscr{P}'$.
  3. $n = \prod_{i=1}^{k} p_i \times 2^a \times 5^b$.

- ⋆ Enfin, on définit pour le premier cas particulier $\left(n = 2^a \times 5^b\right)$ trois notations. On note h, la plus haute puissance entre a et b. On note p, la plus petite puissance entre a et b (2). Et on note d la différence entre h et p. C'est à dire :

$$h = \begin{cases} a & \text{si } a > b \\ b & \text{si } b \geq a \end{cases}, \quad p = \begin{cases} a & \text{si } h = b \\ b & \text{si } h = a \end{cases}, \quad d = h - p.$$

4. Objectif

Nous allons donc montrer que pour chacune des écritures de n, il existe un entier naturel noté κ, tel que le produit de n et κ appartienne à Ω (3).

5. 1er cas

5.1. Propriété

Si n est un entier de la forme (1), alors un coefficient de "remarquabilité" s'écrit : $\frac{9 \times 10^h}{n}$.
Dit autrement, si

$$\boxed{n = 2^a \times 5^b, \text{ on peut poser } \kappa = \frac{9 \times 10^h}{n}.}$$

5.2. Démonstration.

$$\frac{10^h}{n} = \frac{(2 \times 5)^h}{2^a \times 5^b} = \frac{2^h \times 5^h}{2^a \times 5^b}.$$

Admettons que $h = a$) (même démarche si $h = b$), alors

$$\frac{2^h \times 5^h}{2^a \times 5^b} = \frac{5^h}{5^b} = 5^{h-b} = 5^d.$$

Donc, $\frac{9\times10^h}{n} \in \mathbb{N}$ et on a bien $n \times \kappa \in \Omega$, avec $\omega_i = 9 \times 10^h$ (4).

5.3. Exemples

- Pour $n = 6400$, $n = 2^8 \times 5^2$, ainsi $h = 8$, donc $\kappa = \frac{9\times10^8}{6400} = 140625$ et $\omega_i = 9 \times 10^8$.
- Pour $n = 3125000$, $n = 5^8 \times 2^3$, ainsi $h = 8$, donc $\kappa = \frac{9\times10^8}{3125000} = 288$ et $\omega_i = 9 \times 10^8$.

6. 2ème cas

6.1. Propriété

Si n est un entier de la forme (2), alors un coefficient de "remarquabilité" s'écrit : $\frac{10^{(n-1)}-1}{n}$. Dit autrement, si

$$\boxed{n \in \mathscr{P}', \text{ on peut poser } \kappa = \frac{10^{(n-1)}-1}{n}.}$$

6.2. Démonstration

Pour montrer que κ est un entier naturel non nul, on utilise le **Petit Théorème de Fermat** qui nous dit :

> Si p est un nombre premier et si a est un entier non divisible par p, alors $a^{p-1} - 1$ est un multiple de p. En utilisant les notations de congruences on a donc :
> $a^{p-1} \equiv 1[p] \Leftrightarrow a^{p-1} - 1 \equiv 0[p]$

Dans notre cas, on remplace a par 10 et p par n, puis on vérifie que toutes les conditions du théorème sont bien remplies.

(i) , donc n est bien un nombre premier.

(ii) On sait que le quotient de deux entiers n'est pas un entier quand le dénominateur est supérieur au numérateur (5).
Or, $n \leq 10 \Rightarrow n \in \{3,7\}$ et on sait que $3 \nmid 10$ et $7 \nmid 10$.
Ainsi, $\forall n \in \mathscr{P}', \frac{10}{n} \notin \mathbb{N}$.

Toutes les conditions étant remplies, après application de ce dernier, on a bien montré que

$$\kappa \in \mathbb{N}, \text{ avec } n \times \kappa \in \Omega, \text{ et } \omega_i = 10^{n-1} - 1.$$

6.3. Exemples

- Pour $n = 7$, $\kappa = \frac{10^{(7-1)}-1}{7} = \frac{10^6-1}{7} = 142857$ et $\omega_i = 10^6 - 1 = 999999$.
- Pour $n = 13$, $\kappa = \frac{10^{(13-1)}-1}{13} = \frac{10^{12}-1}{13} = 76923076923$ et $\omega_i = 10^{12} - 1 = 999999999999$.

7. 3ème cas

7.1. Propriété

Si n est un entier de la forme (3), alors un coefficient de "remarquabilité" s'écrit : $\frac{\left(10^{\prod_{i=1}^{k}(p_i-1)}-1\right)\times 10^h}{n}$. Autrement dit si,

$$\boxed{n = 10^{\prod_{i=1}^{k} p_i} \times 2^a \times 5^b, \text{ on peut poser } \kappa = \frac{\left(10^{\prod_{i=1}^{k}(p_i-1)} - 1\right)\times 10^h}{n}.}$$

7.2. Démonstration

Après séparation de la fraction (6), on obtient :

$$\frac{\left(10^{\prod_{i=1}^{k}(p_i-1)} - 1\right)}{\prod_{i=1}^{k} p_i} \times \frac{10^h}{2^a \times 5^b}.$$

Le deuxième terme ayant déjà été traité (cf. Cas 1) (7), il suffit de montrer que le premier terme est un entier. Autrement dit, de montrer que

$$\frac{\left(10^{\prod_{i=1}^{k}(p_i-1)} - 1\right)}{\prod_{i=1}^{k} p_i} \in \mathbb{N}, \quad \text{i.e :} \quad 10^{\prod_{i=1}^{k}(p_i-1)} - 1 \equiv 0 \left[\prod_{i=1}^{k} p_i\right].$$

Si l'on développe le produit, on obtient l'expression suivante

$$10^{\prod_{i=1}^{k}(p_i-1)} = 10^{(p_1-1)\times\cdots\times(p_k-1)}.$$

Or on sait par application du **Petit Théorème de Fermat** (cf. Cas 2), que

$$10^{p_1-1} \equiv 1[p_1].$$

Donc par propriété sur les congruences, on a :

$$\left(10^{(p_1-1)}\right)^{\prod_{i=2}^{k}(p_i-1)} \equiv 1[p_1], \quad \text{d'où} \quad 10^{\prod_{i=1}^{k}(p_i-1)} \equiv 1[p_1].$$

En répétant le processus k fois on obtient :

$$10^{\prod_{i=1}^{k}(p_i-1)} \equiv 1[p_1], \quad 10^{\prod_{i=1}^{k}(p_i-1)} \equiv 1[p_2] \quad ,\ldots, \quad 10^{\prod_{i=1}^{k}(p_i-1)} \equiv 1[p_k].$$

Pour conclure, on utilise le **Théorème des restes Chinois** , qui s'énonce comme suit :

> Soient $p_1 \dots p_k$ des entiers deux à deux premiers entre eux, c'est-à-dire $PGCD(p_i, p_j) = 1$ lorsque $i \neq j$. Alors pour tous entiers $q_1 \dots q_k$, il existe un entier x, unique modulo $p = \prod_{i=1}^{k} p_i$ tel que :
>
> $$x \equiv q_1 [p_1]$$
> $$\vdots$$
> $$x \equiv q_k [p_k].$$

Dans notre cas, on pose $q = 1$, et $x = 10^{\prod_{i=1}^{k}(p_i-1)}$.
Les entiers $p_1 \dots p_k$ étant des nombres premiers tous différents, ils sont forcément premiers entre eux.
L'unique condition du Théorème étant remplie, on obtient, après application de ce dernier :

$$10^{\prod_{i=1}^{k}(p_i-1)} \equiv 1 \left[\prod_{i=1}^{k} p_i\right] \quad \text{i.e :} \quad \frac{\left(10^{\prod_{i=1}^{k}(p_i-1)} - 1\right)}{\prod_{i=1}^{k} p_i} \in \mathbb{N}.$$

Au final, le produit de deux entiers valant un entier, on a montré que

$$\kappa \in \mathbb{N}, \text{ avec } n \times \kappa \in \Omega, \text{ et } \omega_i = \left(10^{\prod_{i=1}^{k}(p_i-1)} - 1\right) \times 10^h.$$

7.3. Exemples

- Pour $n = 182$, $n = 2 \times 7 \times 13$, donc $\kappa = \frac{(10^{(7-1)\times(13-1)}) \times 10^1}{182} = \frac{(10^{72}-1)\times 10}{182}$
  et $\omega_i = (10^{72} - 1) \times 10 = \underbrace{9\dots9}_{72}0$.
- Pour $n = 1050$, $n = 2 \times 3 \times 5^2 \times 7$, donc $\kappa = \frac{(10^{(3-1)\times(7-1)}-1)\times 10^2}{210} = \frac{(10^{12}-1)\times 100}{210}$
  et $\omega_i = (10^{12} - 1) \times 100 = \underbrace{9\dots9}_{12}00$.

8. Forme générale

8.1. Propriété

Pour n un entier de la forme générale, c'est à dire pour n'importe quel entier, un coefficient de "remarquabilité" s'écrit : $\frac{10^{\varphi(n')}-1}{n}$. Dit autrement, pour

$$\boxed{n = n' \times 2^p \times 5^h, \text{ on peut poser } \kappa = \frac{(10^{\varphi(n')} - 1) \times 10^h}{n}.}$$

8.2. Démonstration

Après séparation de la fraction (8), on obtient :

$$\frac{(10^{\varphi_{(n')}}-1)}{n'}\times\frac{10^h}{2^a\times 5^b}.$$

Le deuxième facteur ayant déjà été traité (cf. Cas 1), il suffit de montrer que le premier facteur est un entier. Autrement dit, de montrer que

$$\frac{10^{\varphi_{(n')}}-1}{n'}\in\mathbb{N},\quad \text{i.e :}\quad 10^{\varphi_{(n')}}-1\equiv 0\left[n'\right].$$

Pour cela, on utilise le **Théorème d'Euler** qui nous dit :

Pour tout entier $n>0$ et tout entier a premier avec n, autrement dit $PGCD(a,n)=1$,

$$a^{\varphi_{(n)}}\equiv 1[n]$$

où $\varphi_{(n)}$ est l'indicatrice d'Euler.

Dans notre cas, on remplace a par 10, $\varphi_{(n)}$ par $\varphi_{(n')}$ et n par n', puis on vérifie que toutes les conditions du théorème sont bien remplies.

(i) n' est trivialement positif.

(ii) n' étant un produit de nombres appartenant à $\mathscr{P}'$, n' et 10 sont forcément premiers entre eux. En effet, le produit de x nombres impairs (hors 5), étant un impair, $PGCD(10,n')$ ne peut être que 1.

Toutes les conditions du Théorème étant remplies, après application de ce dernier, on obtient bien :

$$10^{\varphi_{(n')}}\equiv 1\left[n'\right]\Leftrightarrow 10^{\varphi_{(n')}}-1\equiv 0\left[n'\right].$$

Le produit de deux entiers étant un entier, on a :

$$\frac{(10^{\varphi_{(n')}}-1)\times 10^h}{n}\in\mathbb{N}.$$

Et on a bien, $n\times\kappa\in\Omega$, avec $\omega_i=(10^{\varphi_{(n')}}-1)\times 10^h$.

8.3. Exemples

- Pour $n=147, n=7\times 7\times 3$, donc $n'=147$. Par calcul, on a $\varphi_{(n')}=\varphi_{(147)}=84$. Ainsi, $\kappa=\frac{10^{84}-1}{147}$ avec $\omega_i=10^{84}-1=\underbrace{9\dots9}_{84}$.
- Pour $n=3630, n=2\times 3\times 5\times 11\times 11$, donc $n'=3\times 11\times 11=363$. Par calcul, on a $\varphi_{(n')}=\varphi_{(363)}=220$. Ainsi, $\kappa=\frac{(10^{220}-1)\times 10^1}{3630}$ avec $\omega_i=\left(10^{220}-1\right)\times 10=\underbrace{9\dots9}_{220}0$.

9. Conclusion

On a montré par disjonction des cas que,

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \exists\kappa\in\mathbb{N}, n\times\kappa\in\Omega.$$

Finalement, n'importe quel entier peut être qualifié de "remarquable".

9.1. Remarques

1. Le coefficient de "remarquabilité" donné par les formules ci-dessus n'est pas forcément le plus petit entier tel que $n \times \kappa \in \Omega$. En effet,
   — Pour $n = 7, \kappa = \frac{10^6-1}{7}$, dans ce cas c'est bien le plus petit entier tel que $7 \times \kappa \in \Omega$.
   — En revanche, pour $n = 11, \kappa = \frac{10^{10}-1}{11}$ qui n'est pas du tout le plus petit coefficient possible. Effectivement, $11 \times 9 = 99$ et $99 \in \Omega$.

   Il serait donc intéressant de poursuivre ce travail dans le but de déterminer une formule donnant dans chaque cas le plus petit coefficient possible.
2. Enfin on remarque que les trois formes de nombres appartenant a Ω sont utilisés. En effet lorsque que l'entier choisit est fait partit du premier cas particulier, on obtient la première forme de nombres appartenant a Ω, si l'entier fait partit du deuxième cas particulier, on obtient la deuxième forme et si il est du troisième cas particulier, on obtient la troisième forme. Autrement dit,

$$\text{si,}\quad n = 2^a \times 5^b,\ \text{alors } \omega_i \text{ est de la forme : } 9 \times 10^\alpha.$$

$$\text{si,}\quad n \in \mathscr{P}',\ \text{alors } \omega_i \text{ est de la forme : } 10^\beta - 1.$$

$$\text{si,}\quad n = \prod_{i=1}^{k} p_i \times 2^a \times 5^b,\ \text{alors } \omega_i \text{ est de la forme : } (10^\gamma - 1) \times 10^\theta.$$

Notes d'édition

(1) Autrement dit, si $n = \prod_{p \in \mathscr{P}} p_i^{\alpha_i}$ est la décomposition de n en facteurs premiers, alors $n = n' \times 2^a \times 5^b$.

(2) Ainsi, $h = \max(a, b)$ et $p = \min(a, b)$.

(3) En fait, on démontre que, pour tout entier $n = n' \times 2^a \times 5^b$, il existe un entier κ tel que le produit $n \times \kappa$ est dans Ω.

(4) Ici, $\omega = 9 \times 10^h$ et $\kappa = 9 \times 5^d$.

(5) Plus précisément. On veut savoir si 10 est ou non divisible par n. Une première condition est : $10 \geqslant n$; et on a cette deuxième condition : n est un diviseur de 10 différent de 2 et 5. Or, ici $n' \in \mathscr{P}'$. Donc $n = 3$ ou 7. Et donc $\frac{10}{n}$ n'est pas un entier.
Précisons aussi que la notation $3 \nmid 10$ (ou $7 \nmid 10$) veut dire que 3 ne divise pas 10 (ou 7 ne divise pas 10).

(6) Il serait mieux de dire : “Après réécriture ...” plutôt que “Apprès séparation ...”

(7) On déjà montré que $\frac{10^h}{2^a \times 5^b}$ est un entier ce qui prouve que $\kappa = \frac{(10^{\prod_{i=1}^{k}(p_i-1)}-1) \times 10^h}{n}$ est un entier et $\kappa \times n$ est dans Ω.

(8) Il serait mieux de dire : “Après réécriture ...” plutôt que “Après séparation ...”