Des plis qui se déplient

Année 2022 – 2023

Fleurit Valentin, Horion Arthur, élèves de classe Terminale

Établissement : Lycée Polyvalent Léonce Vieljeux, La Rochelle

Encadrés par : Rachel Biton et Pierre Vederine

Chercheur **:** Cyrille Ospel, Université de La Rochelle

1. Présentation du sujet

On plie une bande de papier toujours dans le même sens, n fois. On déplie ensuite le pliage obtenu et dispose les plis de façon à former des angles droits dans le sens où ils ont été pliés. On s'intéresse à la figure obtenue lorsque l'on regarde le pliage de côté.
On cherche :

- Le nombre de segments de la figure obtenue
- Les dimensions de la grille dans laquelle la figure obtenue peut tenir (on prend comme unité de la grille la longueur des segments de la figure)

2. Taille de la figure

2.1. Nombre de segments

Pour chaque nouveau pliage, on plie chaque segment en deux. Le nombre de segments est donc doublé à chaque pliage, il y a donc: 2^n segments. La démonstration est triviale et laissée au lecteur.

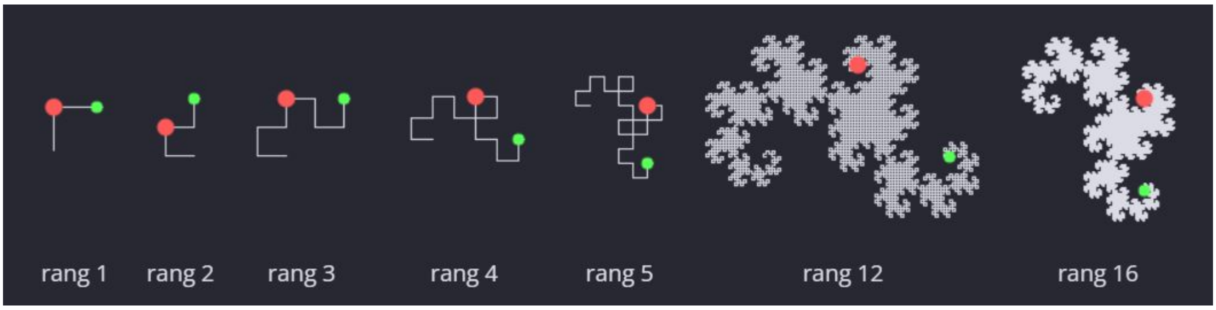
2.2. Dimensions

Nous avons remarqué que la figure à un rang $n+1$ est composée de la figure au rang précédent n , répétée deux fois en partant du même point mais avec un angle droit à la jointure (voir images plus bas). Il s'agit donc d'une figure géométrique évoluant par reproduction et assemblage d'une forme héritée de la figure à l'état précédent. C'est ce qu'on appelle une fractale.

Nous avons ensuite choisi de représenter les angles de la figure sous la forme d'une liste de 0 et de 1 : 0 et 1 correspondant à un angle dans un sens et dans l'autre. Cette liste est définie par une fonction de récurrence telle que : `A(n+1) = join(inv(A(n)),[0],A(n))`. Où `inv(liste)` est une fonction qui inverse l'ordre des éléments de la liste et qui remplace les 0 par des 1 et les 1 par des 0 (exemple: `inv([1, 0, 1, 1]) = [0, 0, 1, 0]`), et `join(listes` une fonction qui crée une nouvelle liste issue des listes données.

Les listes obtenues (en partant du rang n=1) sont donc: `[0]`, `[1, 0, 0]`, `[1, 1, 0, 0, 1, 0, 0]`, `[1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0]`,…

Nous avons donc créé un programme en Python puis un simulateur en ligne sur le même principe permettant de trouver la figure à un rang n. Voici les figures obtenues pour certains rangs donnés :



Sur les images, le point rouge représente les points de jonction entre les deux figures au rang n qui forment la figure au rang n+1.

La figure semble former une fractale qui se précise de plus en plus lorsque l'on augmente le nombre de pliages n.

À l'aide du programme nous avons pu mesurer les dimensions de la figure pour certains rangs, par exemple en partant du rang n=1 on a une figure de dimensions: 1/1, 1/2, 2/3, 3/5, 6/7, ...

Après observation des figures aux rangs pairs et impairs, en superposant quelques unes de ces figures, nous avons remarqué que :

- Pour passer d'un rang pair n au suivant n+2, on a :
  - $l_{n+1}=l_n\times 2+1\ et\ L_{n+1}=L_n\times 2+1$ (l est la longueur et L est la largeur de la figure)
- Pour passer d'un rang impair au suivant, une fois sur deux, on a :
  - $l_{n+1}=l_n\times 2\ et\ L_{n+1}=L_n\times 2+1\ puis\ l_{n+1}=l_n\times 2+2\ et\ L_{n+1}=L_n\times 2+1$

Nous avons ensuite décidé d'écrire l et L sous la forme d'une matrice: $\begin{pmatrix} l \\ L \end{pmatrix}$

3. Conclusion

Nous arrivons donc à l'expression des réponses.
Le nombre de segments pour n pliages est obtenu selon : $S_n=2^n$

Nous avons aussi représenté les dimensions de la figure selon deux suites :

- celle aux rangs pairs $\left\{\begin{array}{c} P_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \\ P_{n+2}=2P_n+\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\end{array}\right\}$
- celle aux rangs impairs $\left\{\begin{array}{c} I_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \\ I_{n+2}=\left\{\begin{array}{l} 2I_n+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} si\, n\equiv 3[4] \\ 2I_n+\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} si\, n\equiv 1[4]\end{array}\right\}\end{array}\right\}$

Ces deux dernières formules sont de simples conjectures.