Couper le quadrillage

Année 2022 – 2023

Maïna Harscoet, Stéphane Ljutovac, Zoé Le Provost, Lou Roguet et Jules Solbes-Wilmet
élèves de 3ème

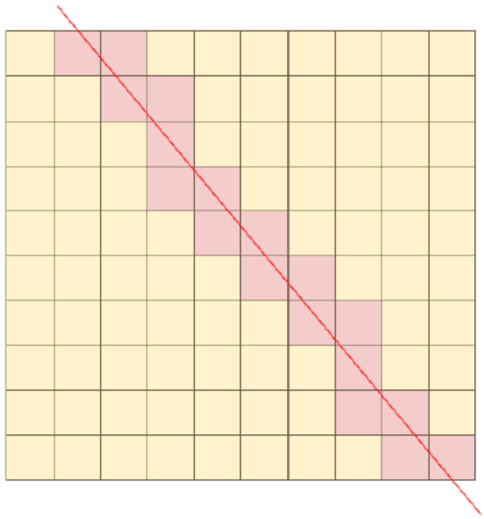
Établissement : Collège Hélène de Fonsèque, Surgères (17)
Encadré·es par : Romain Torchia
Chercheur **:** Gilles Bailly-Maître, Université de La Rochelle

1. Présentation du sujet

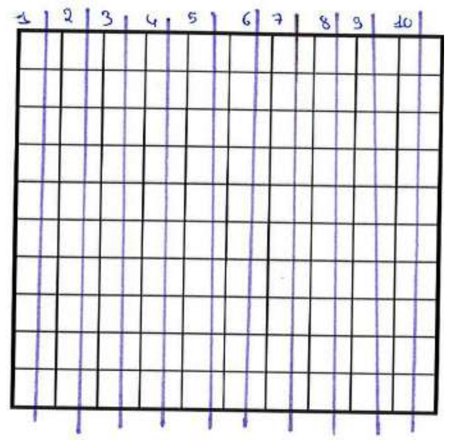
On considère un quadrillage 10×10.

Si on trace une droite, on colorie les cases qui sont coupées par la droite.

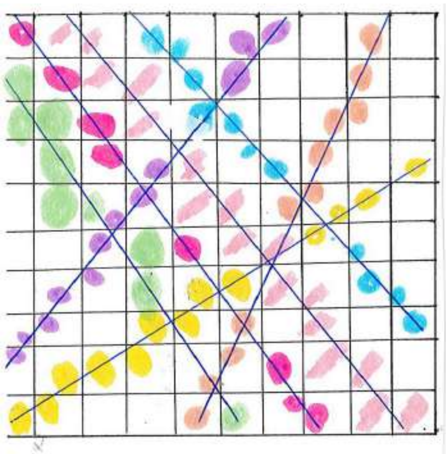
Combien de droites faut-il au minimum pour colorier toutes les cases du carré ? (1)



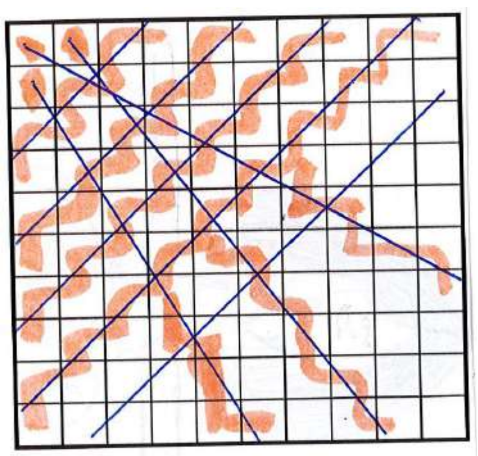
2. Premiers essais



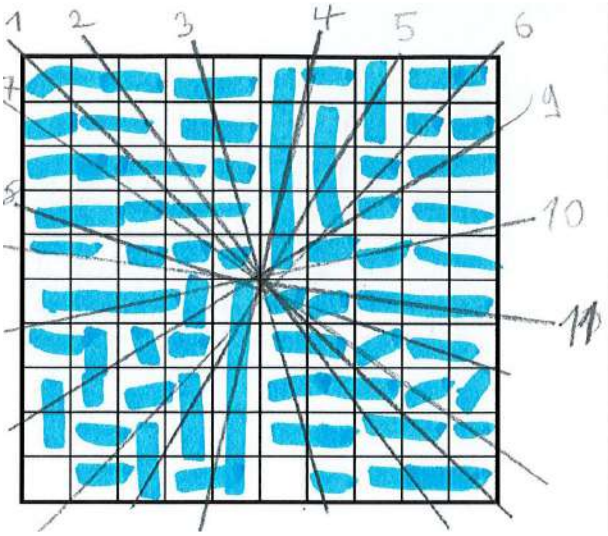
Nous avons commencé par tracer des droites parallèles à un côté du carré. Nous avons obtenu 10 droites. Notre objectif était donc de colorier le carré en moins de 10 droites.



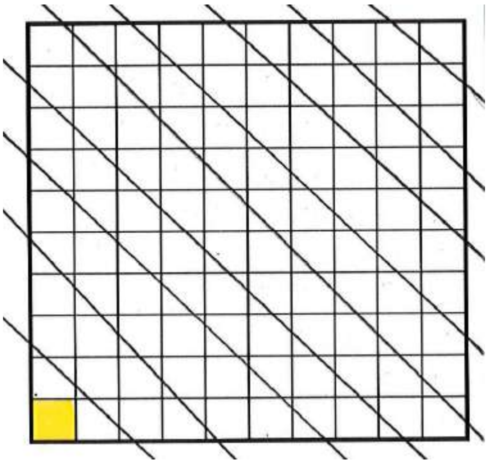
Grâce à ce schéma, nous avons conclu que, plus nos droites se croisent, plus on perd des carreaux.



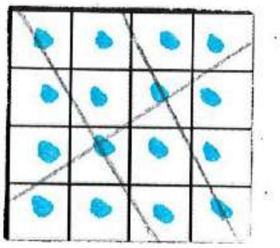
On a commencé à avoir une organisation, en mettant des droites parallèles en diagonale, tout en gardant des droites désorganisées.



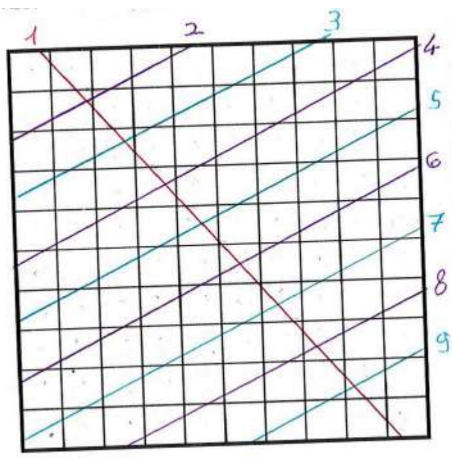
On a essayé avec la symétrie centrale, de nouveau sans succès, car le nombre de droites était trop important pour couvrir tous les carreaux. De plus, si on trace deux droites sécantes passant par le centre, on est obligés de passer par ces deux droites pour en tracer une autre, ce qui fait perdre des carreaux.



Ensuite nous avons commencé à faire des droites parallèles entre elles mais il restait toujours un carré non traversé par les droites une fois qu'on a eu fini de tracer 9 droites. Il fallait donc en tracer une de plus, donc 10 droites en tout.



Puis, on a travaillé sur des quadrillages plus petits : 4×4. On a finalement réussi à faire trois traits pour recouvrir la totalité des carreaux.



Finalement, nous avons réussi à faire seulement 9 droites pour traverser les 100 carreaux. C'est le minimum que nous avons réussi à faire.
En essayant de traduire proportionnellement un carré 4×4 en 10×10, nous n'avons pas abouti.

3. Des éléments de preuve

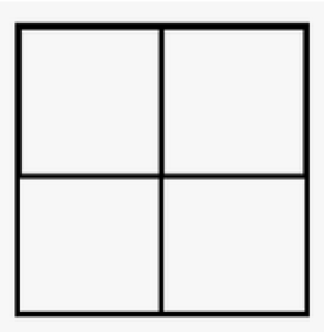
Nous n'avons pas réussi à démontrer que, dans le cas d'un carré 10×10, il faut au minimum 9 droites pour colorier toutes les cases du carré.
Néanmoins, dans le cadre de carré de dimensions plus petites, nous avons démontré que, pour un carré de côté n carreaux, il faut au minimum $n-1$ droites pour colorier toutes les cases du carré.

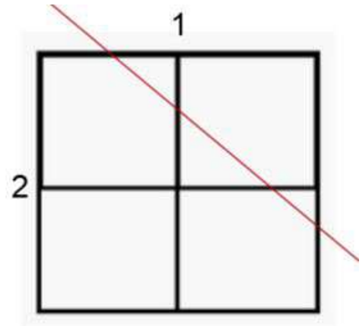
3.1. Le carré 2x2

Nous avons utilisé la propriété suivante :

Propriété : une droite ne peut traverser une ligne du quadrillage qu'une seule fois.

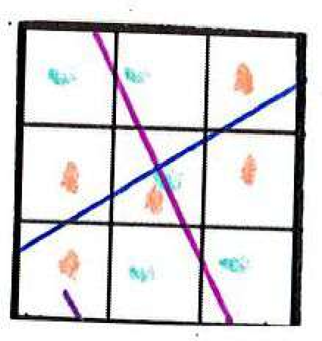
Par exemple, sur le quadrillage 2×2 suivant, la droite rouge ne peut traverser qu'une seule fois les lignes du quadrillage 1 et 2. A partir du moment où l'on traverse une ligne, on touche un carreau. On y ajoute ensuite le carreau de départ et on obtient trois carreaux touchés sur quatre au maximum avec une seule droite.
Donc, deux droites est le minimum que nous puissions faire avec un carré de 2×2 car il est impossible de réaliser le coloriage avec une seule droite.





3.2. Le carré 3x3

Sur le carré ci-dessous, nous avons réfléchi au nombre maximum de carreaux que nous pouvons colorier avec une droite. Dans ce carré, il y a 4 lignes de quadrillage donc une droite peut traverser au maximum 5 carreaux. Il est donc impossible de traverser tous les carreaux avec une seule droite. Nous avons réussi à colorier toutes les cases du carreaux avec deux droites. Deux droites est donc le minimum pour réaliser le coloriage.

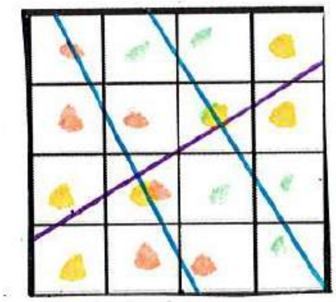


3.3. Le carré 4x4

Sur un carré de 4 carreaux de côté contenant 16 carreaux en tout, il y a 6 lignes de quadrillages. Donc une droite tracée peut, au maximum, traverser 7 carreaux. En traçant une deuxième droite, traversant également ces 6 lignes, nous allons colorier 7 carreaux de plus. Grâce aux deux droites que nous avons tracées, nous pouvons donc traverser 14 carreaux au maximum. Cela ne recouvre pas l'intégralité du quadrillage (16 carreaux). Donc, le minimum de droites que nous devons tracer pour recouvrir les carreaux de ce quadrillage est 3 car nous avons réussi à colorier tous les carreaux avec 3 droites.

3.4. Le carré 5x5

Sur un carré de 5 carreaux de côté contenant 25 carreaux en tout, il y a 8 lignes de quadrillage.



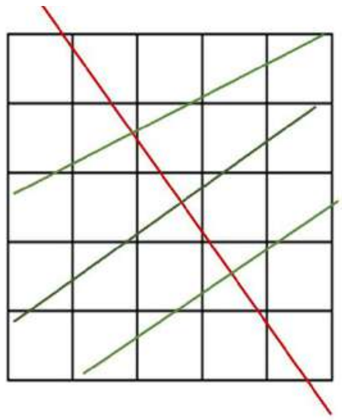
Donc une droite tracée en diagonale peut, au maximum, traverser 9 carreaux. En traçant une 2e droite, traversant également ces 8 droites, nous allons colorier 9 carreaux aussi. Ces deux droites vont obligatoirement se croiser. En effet, une droite traversant un maximum de carreaux relie nécessairement deux coins en diagonale pour pouvoir traverser toutes les lignes du quadrillage. Ceci nous fera donc perdre un carreau traversé par les deux droites simultanément.

Nous avons donc la première droite qui traverse 9 carreaux et la deuxième qui en traverse 8 nouveaux. Avec ces deux droites, nous pouvons donc traverser 17 carreaux.

Par conséquent, ces deux droites vont se croiser au centre en croix. Et ce sont les deux seules droites qui peuvent traverser 9 carreaux. Donc, dorénavant, le maximum de carreaux traversés par une droite est 8. Cependant, une telle droite sera sécante aux deux premières. 6 nouveaux carreaux au maximum pourront donc être traversés.

Nous obtenons donc un total de $17 + 6 = 23$ carreaux traversés. (2)

Cela ne recouvre pas l'intégralité du quadrillage (25 carreaux). Donc, le minimum de droites que nous devons tracer pour recouvrir les carreaux de ce quadrillage est 4 car nous avons réussi à colorier tous les carreaux avec 4 droites.



Notes d’édition

(1) À noter : les cas très particuliers où une droite passe par un coin ou est confondue avec une ligne du quadrillage sont interdits.

(2) On voit sur la figure que la troisième droite (celle du haut ou celle du bas) est sécante avec les deux premières (proches des diagonales du carré). On perd donc une seule case, et le raisonnement tient quand même car $17+7=24$!