Comment optimiser la batterie d'une voiture électrique ?

Maths en Jeans 2022–2023

ELOUADI Firdaous, SCOFIELD Alex, CHEVAILLIER Julien & RONSEAUX Aileen

Note

Hey les gens, je mets cette petite note à votre intention. N'hésitez pas à vous inspirer du contenu que vous avez mis sur les diapos puisqu'elles récapitulent bien notre sujet. Je vous remets le lien vers le Google Slides en question.

https://docs.google.com/presentation/d/1EEYepHKvdbBY8upy4X9JcZbjFnpYKQAwUHf_IlR6R7o/edit#slide=id.g22e286dd7a5_1_2

Symboles mathématiques, parce que flemme d'aller les chercher à chaque fois :

≤ ≥ ∈ ∩ ℝ ℕ ⇔ ∀ ∘

INTRODUCTION (Aileen)

Pour accélérer, autrement dit, pour gagner de l'énergie cinétique, il est nécessaire de dépenser de l'énergie, qu'elle ait été produite par nos muscles, un moteur à combustion, ou qu'elle provienne d'une batterie électrique.

Lorsqu'une voiture thermique ralentit, son énergie cinétique est généralement perdue, tandis qu'une voiture électrique peut en récupérer une partie qu'elle stockera dans sa batterie.

Le *frein moteur* est le ralentissement naturel qui a lieu lorsque l'on cesse d'accélérer. Contrairement à ce que l'on appellera le *frein provoqué* – celui que l'on produit en appuyant sur la pédale de frein – il n'implique pas les disques de frein dont l'objectif est de créer des frottements pour causer une perte d'énergie cinétique. Le ralentissement est moins fort lorsqu'il est causé par le frein moteur mais il est celui qui permet de récupérer une quantité d'énergie maximale.

Notre problème est donc le suivant : quelle conduite adopter pour optimiser cette récupération d'énergie lors du ralentissement dans les situations suivantes ?

1. Rencontre d'un panneau stop : arrêt obligatoire au niveau du panneau.
2. Rencontre d'un feu tricolore : conduite à adapter en fonction de la couleur du feu.
3. Parcours d'une rue ponctuée d'une série de feux tricolores.

CAS 1 : panneau stop (Firdaous & Julien)

Lorsque l'on arrive à un panneau stop, le code de la conduite nous impose un arrêt du véhicule au niveau de la balise. Ici, nous souhaitons effectuer cet arrêt en utilisant uniquement notre frein moteur, afin d'économiser au maximum l'énergie de notre véhicule.

Nous avons connaissance des éléments suivants :

a, l'accélération de notre véhicule, négative car nous ralentissons

t, la variable correspondant au temps écoulé depuis le début de l'observation

v0, la vitesse initiale du véhicule

v(t), la vitesse en fonction du temps, avec $v(t) = a \cdot t + v0$

d(t), la distance en fonction du temps, avec $d(t) = a \cdot t^2/2 + v0 \cdot t$ qui correspond à la distance parcourue depuis le début de l'observation

Commençons par trouver combien de temps met la voiture à s'arrêter. Pour cela, on résout $v(t) = 0$ ce qui nous donne $t = -v0/a$.
On utilise ensuite cette valeur de t pour trouver la distance à parcourir pour s'arrêter grâce à la fonction d(t).
On trouve $d(-v0/a) = a/2 \cdot (-v0/a)^2 + v0 \cdot (-v0/a) = v0^2/2a - v0^2/a = -v0^2/2a$

Ainsi, afin de pouvoir s'arrêter à temps et économiser un maximum d'énergie, il faut lever le pied de la pédale à $-v0^2/2a$ unités de distance de la balise stop.

CAS 2 : feu tricolore (Firdaous & Julien)

texte

CAS 3 : série de feux tricolores (Alex & Aileen)

Modélisation mathématique (Aileen)

Rue

Le premier élément essentiel de notre modélisation est la rue, sur laquelle seront disposés des feux ainsi qu'une voiture. Pour simplifier notre problème, la rue est rectiligne. Nous allons la représenter grâce à deux axes positifs : le temps en abscisse et la distance en ordonnée. La distance 0 représente le « point de départ » de la rue, et l'instant 0, l'instant du début de l'analyse du comportement de la voiture que nous étudions. Chaque élément sera représenté en fonction de sa position à un moment donné, selon sa nature et son état.

Selon l'avancement de notre étude, la rue sera soit de longueur finie, soit de longueur infinie.

Voiture

La voiture dont nous souhaitons étudier la consommation est décrite par sa position dans la rue en fonction du temps. La voiture ne peut pas reculer, mais peut s'arrêter. Ainsi, la voiture pourra être représentée par une fonction croissante, dont la dérivée première indiquera la vitesse, et la dérivée seconde l'accélération. Cette fonction sera appelée la *fonction de trajectoire* de la voiture, définie et continue sur un intervalle inclus dans $\mathbb{R}^+$.

De plus, la voiture peut soit commencer son parcours à l'instant 0 soit plus tard. On utilisera le terme *instant de départ* pour désigner la borne inférieure de l'intervalle de définition de la fonction de trajectoire.

Nous considérons dans un premier temps que la variation de vitesse de la voiture est instantanée. Sa fonction de trajectoire forme donc des angles et n'est pas dérivable en un nombre fini de points. Cela permet d'exprimer la fonction de trajectoire comme une fonction affine par intervalles, dont le coefficient directeur indique la vitesse de la voiture sur l'intervalle donné.

Notons que cela ne permet plus de représenter le frein moteur. On pourra néanmoins remarquer qu'il suffit d'arrondir la courbe pour en obtenir une représentation de plus en plus fidèle, similaire à celles que l'on a pu obtenir dans les deux premières parties du problème. On pourra alors considérer la tangente aux points d'inflexions pour calculer le gain d'une telle fonction, comme nous le verrons ultérieurement.

Feux tricolores

La situation que nous allons analyser consiste en une série de feux tricolores. C'est-à-dire un enchaînement de feux qui, au fil du temps, seront soit au rouge, soit au vert. Afin d'exprimer leur état (vert ou rouge) au fil du temps, nous avons besoin de décrire un feu par les propriétés suivantes.

- La *distance du feu* dans la rue, notée d, autrement dit la distance qui sépare le feu du point de distance 0.
- La *période du feu*, notée P. On suppose dans notre expérience que les feux ont une durée au vert et au rouge identiques. Une période représente donc la durée d'un cycle rouge-vert. On déduit de cette période la durée du feu au vert, et la durée du feu au rouge, égale à la moitié de la période du feu.
- L'*instant initial du feu*, c'est-à-dire l'instant auquel il commence pour la première fois un cycle rouge-vert. On le désignera par la lettre i avec $0 \leq i < P$. Par exemple, s'il est au rouge pour la première fois 3 secondes après l'instant zéro, alors $i = 3$. S'il est au rouge depuis 4 secondes à l'instant 0, on aura $i \equiv -4\ [P]$ soit $i = P - 4$ si $P \geq 4$.

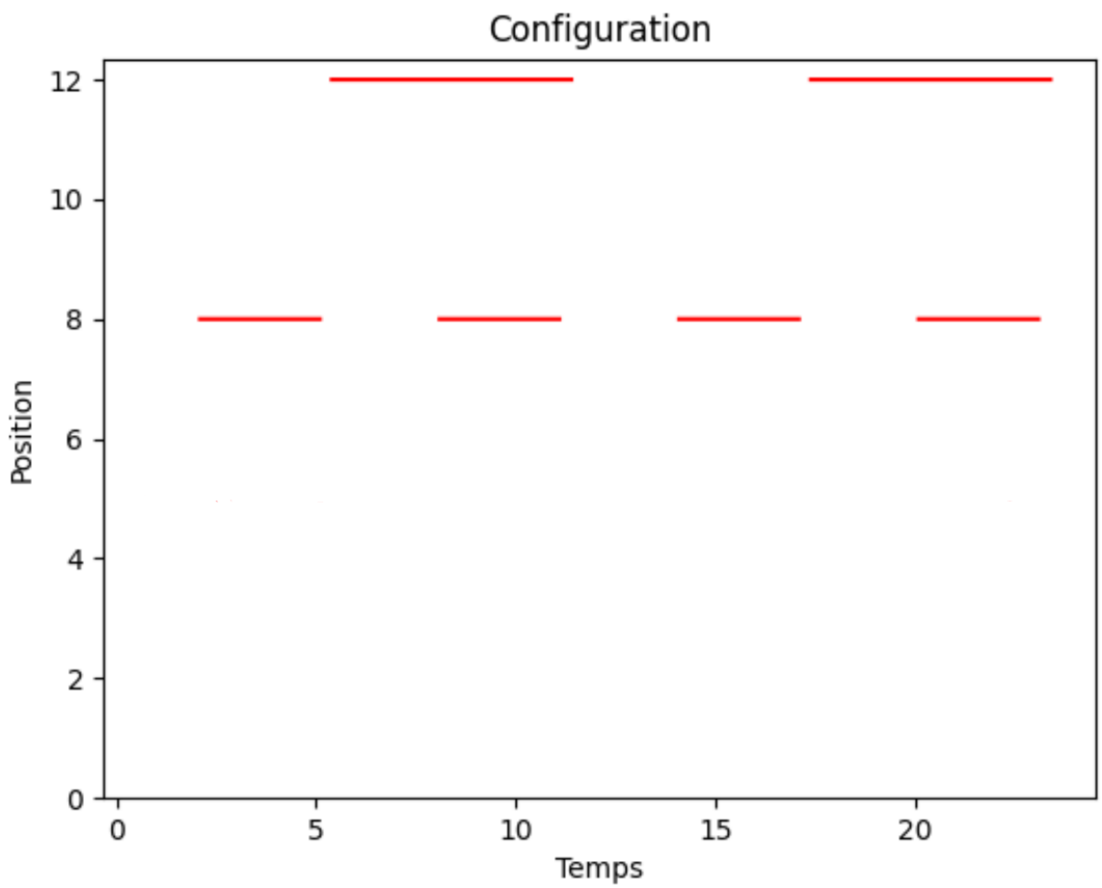
Nous désignerons par *configuration de feux* l'ensemble des feux d'une route, chacun caractérisé par ses attributs respectifs.

Soit un feu de période P, de distance d et d'instant initial i. Le feu sera représenté graphiquement comme une fonction de valeur constante d définie sur l'union d'intervalles $\{[k \cdot P + i\ ;\ (k \cdot P + i) + P/2[\ \mid k \in \mathbb{N}\} \cap \mathbb{R}+$. Ainsi, l'on représente les périodes où le feu est au rouge. Il ne doit y avoir aucun point d'intersection entre la fonction des feux et celle de la trajectoire de la voiture pour qu'aucun feu rouge ne soit grillé.

Exemples de représentations graphiques

Rue et feux

Voici l'exemple d'une rue sur laquelle se trouvent deux feux tricolores. Il nous est ainsi possible de savoir, à un instant donné, l'état (au vert ou au rouge) de chaque feu.



Le feu en haut du graphique est :

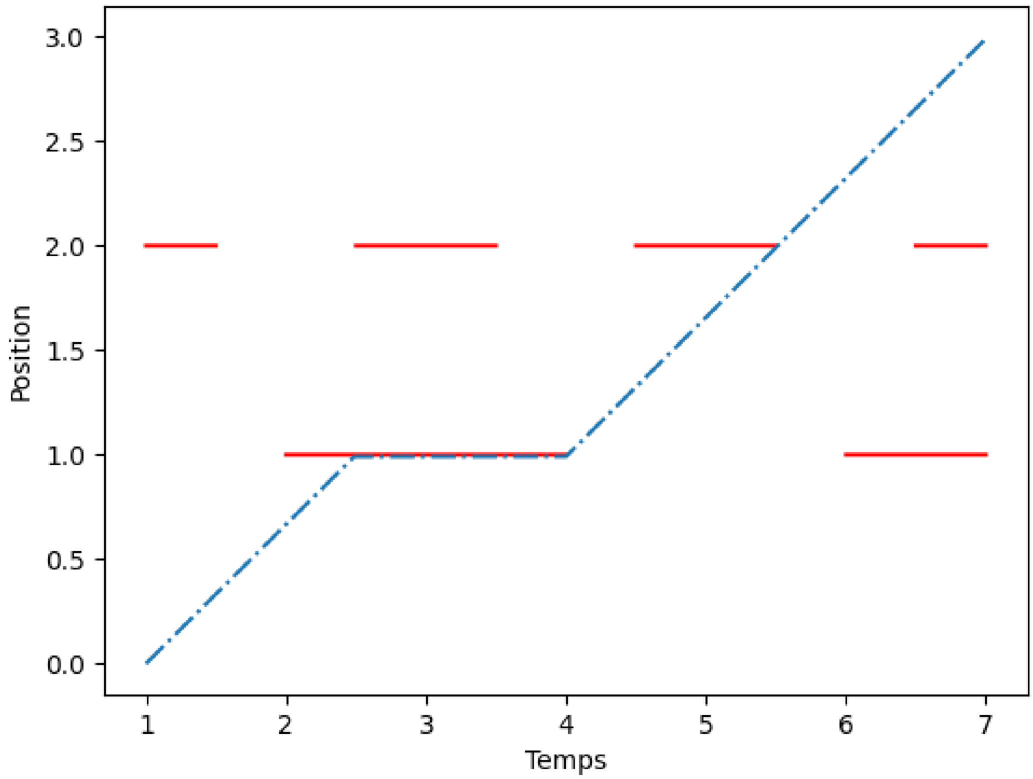
- de période P = 10 car il faut 10 secondes au feu pour effectuer un cycle rouge-vert ;
- de distance d = 12 car il vaut 12 sur les intervalles sur lesquels il est défini ;
- d'instant initial i = 5 secondes car la première phase rouge commence à 5 secondes.

Le feu au milieu du graphique est :

- de période P = 5 car il faut 5 secondes au feu pour effectuer un cycle rouge-vert ;
- de distance d = 8 car il vaut 8 sur les intervalles sur lesquels il est défini ;
- d'instant initial i = 2.5 secondes car la première phase rouge commence à 2.5 secondes.

Rue, feux et voiture

Voici l'exemple d'une rue sur laquelle sont représentés deux feux et le trajet d'une voiture.



Dans cette situation, la voiture :

1. avance à vitesse constante ;
2. s'arrête au premier feu ;
3. reprend sa route à la même vitesse ;
4. passe le deuxième feu exactement à l'instant où il passe au vert ;
5. arrive au bout de la rue.

Comment optimiser l'énergie dépensée (Aileen)

Afin d'optimiser l'énergie dépensée par la voiture, nous allons chercher à quantifier l'énergie électrique gagnée ou perdue par la batterie lors d'une accélération ou une décélération (accélération négative).

On considérera qu'il n'y a pas de perte lors de la conversion de l'énergie électrique vers l'énergie cinétique. Ainsi, si la batterie perd une quantité d'énergie E, i.e. gagne une quantité d'énergie électrique $-E$, alors la voiture gagnera E d'énergie cinétique.

Au contraire, l'énergie cinétique d'un ralentissement est pour la plupart perdue, et l'on considérera que seul $1/n$ de l'énergie sera conservée, $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, la batterie gagnera une quantité d'énergie électrique $1/n$ si la voiture perd une quantité d'énergie 1.

L'on obtient ainsi un système de bonus-malus.

	Accélération	Décélération
Énergie électrique (*Ee*)	-1	$+1/n$
Énergie cinétique (*Ec*)	$+1$	-1
Facteur *F* = *Ee* / *Ec*	-1	$-1/n$

Ainsi, pour F le facteur correspondant à la situation (accélération ou décélération), si une voiture gagne une quantité d'énergie cinétique (positive ou négative) Ec, alors la batterie se rechargera de $Ee = F \cdot Ec$.

Pour quantifier cette énergie cinétique, nous utiliserons la formule suivante : l'énergie cinétique Ec d'un corps de masse m et de vitesse v est $Ec = \frac{1}{2}\, m \cdot v^2$. Considérons une voiture passant d'une vitesse initiale Vi à une vitesse finale Vf. L'énergie cinétique gagnée est donc la différence entre l'énergie cinétique finale et l'énergie cinétique initiale. Ainsi, la voiture aura gagné $\frac{1}{2}\, m\, (Vf^2 - Vi^2)$ d'énergie cinétique.

Ainsi, nous obtenons la fonction de gain g suivante.

$g(Vi, Vf) = -\frac{1}{2}\, m\, (Vf^2 - Vi^2)$ en situation d'accélération, i.e. si $Vf \geq Vi$

$= -1/n \cdot \frac{1}{2}\, m\, (Vf^2 - Vi^2)$ si $Vf \leq Vi$

Note : nous utiliserons parfois le terme « coût » au lieu de « gain ». Ces deux désignations restent correctes car leurs valeurs sont simplement opposées (un gain de –3 représente un coût de +3).

Nous calculons ensuite, pour chaque variation de vitesse, le gain associé afin d'obtenir le *gain d'une fonction de trajectoire*. Optimiser la consommation d'une voiture électrique, c'est chercher à maximiser le gain ainsi obtenu.

Coût en énergie d'une configuration de feux (Aileen)

À présent, plaçons-nous en tant qu'architecte. Imaginons que nous souhaitons optimiser la configuration des feux de manière à minimiser le coût moyen du passage des voitures dans la rue.

Différentes configurations de feux seront comparables à condition de considérer que toutes les voitures se comportent de manière identique. L'attitude que nous avons dans la vie quotidienne peut se décrire comme suit.

ALGORITHME 1

Répéter en boucle :

- s'il y a un feu et qu'il est rouge : s'arrêter ;
- sinon : rouler à la vitesse maximale réglementée.

Cela est dû au fait que nous ne savons pas quand le feu changera de couleur. Supposons donc que nous nous trouvons dans une ville où le temps avant le changement d'état du feu est affiché. Nous supposons que nous pouvons voir l'état du feu et son compteur à n'importe quel endroit dans la rue. Cela nous permet de créer l'algorithme de déplacement comme suit.

ALGORITHME 2

Répéter en boucle :

- s'il y a un feu en vue : adapter sa vitesse de sorte à passer le feu au vert (on optera pour la plus grande vitesse permettant un tel résultat sans dépasser la vitesse maximale réglementée) ;
- sinon : rouler à la vitesse maximale réglementée.

En choisissant un de ces algorithmes, nous permettons, pour une configuration de feux et un instant donnés, de créer une unique fonction de parcours.

De plus, nous pouvons calculer le gain d'une fonction de parcours basée sur les variations de cette fonction et la fonction de gain présentée précédemment.

Cela nous permet de créer une fonction de gain qui à chaque instant t associe le gain de la fonction de parcours d'instant de départ t.

Ainsi, le gain moyen d'une configuration de feux est la valeur moyenne de la fonction de gain que nous avons pu créer à l'aide de l'algorithme choisi.

Nous choisirons arbitrairement le deuxième algorithme, car il minimise le coût d'un déplacement. En effet, dans le cas du premier algorithme, la vitesse de la voiture variera entre 0 et $Vmax$, la vitesse maximale réglementée ; alors que dans le deuxième algorithme, la vitesse variera entre deux vitesses initiales et finales (respectivement Vi et Vf) comprises dans l'intervalle [0, $Vmax$]. Ainsi, la différence ($Vf^2 - Vi^2$) sera moins grande si nous agissons selon le deuxième algorithme, ce qui minimise le coût selon l'expression de la fonction de coût présentée dans la partie précédente et que nous rappelons ci-dessous :

g(Vi, Vf) $= -\frac{1}{2}\, m\, (Vf^2 - Vi^2)$ en situation d'accélération, i.e. si $Vf \geq Vi$

$= -1/n \cdot \frac{1}{2}\, m\, (Vf^2 - Vi^2)$ si $Vf \leq Vi$.

Coût moyen pour une rue avec un unique feu (Aileen)

Soit une rue ne comportant qu'un feu de distance d, de période P, et d'instant initial i.

Puisque la fonction du feu est périodique, il nous suffit, pour calculer le gain moyen de la configuration de feux, de considérer tous les instants de départ t compris dans un intervalle d'amplitude P. Afin de faciliter les calculs, nous considérerons t appartenant à l'intervalle suivant : $[j\,;\,j + P[$ avec $j = i - d/Vr$.

Soit une voiture d'instant de départ t. D'après l'algorithme de déplacement que nous avons choisi, nous pouvons scinder le déplacement de la voiture en deux phases.

Phase 1

À l'instant t, la voiture se trouve par définition à distance 0. Sachant qu'il y a un feu en vue, la voiture doit adapter sa vitesse de sorte à atteindre la distance d à un instant où le feu est au vert. On notera $V1(t)$ la vitesse de la voiture d'instant de départ t pendant la phase 1 qui durera jusqu'à ce que la voiture atteigne la distance d.

Phase 2

Une fois le feu passé, aucun feu n'est en vue, et la voiture roulera à la vitesse maximale de réglementation Vr.

Ainsi, le gain total de la fonction de trajectoire de la voiture d'instant de départ t vaut g($V1(t)$, Vr). Le gain moyen de cette configuration de feux est : $\frac{\int_j^{j+P} g(V1(t), Vr)\, dt}{P}$.

Trouvons une expression pour $V1(t)$. Nous rappellons que la vitesse $V1(t)$ doit permettre à la voiture de passer au vert, et être maximale, tout en restant inférieure à la vitesse de réglementée Vr.

• Pour $t \in [j + P/2\,;\,j + P[$, on a $V1(t) = Vr$.

Pour montrer cela, calculons tout d'abord la durée Δt nécessaire à la voiture pour parcourir la distance d qui la sépare du feu, sachant qu'elle roule à la vitesse Vr. Selon la formule $v = d/t$, on obtient $\Delta t = d/Vr$. Vérifions donc que la voiture ne traversera pas un feu rouge si $t \in [j + P/2 ; j + P[$ et $V1(t) = Vr$.

Puisque $j = i - d/Vr$, on a : $i - d/Vr + P/2 \leq t < i - d/Vr + P$.

Or,

$$\begin{aligned} i - d/Vr + P/2 \leq t < i - d/Vr + P &\Leftrightarrow i - d/Vr + P/2 + \Delta t \leq t + \Delta t < i - d/Vr + P + \Delta t \\ &\Leftrightarrow i - d/Vr + P/2 + d/Vr \leq t + \Delta t < i - d/Vr + P + d/Vr \\ &\Leftrightarrow i + P/2 \leq t + \Delta t < i + P. \end{aligned}$$

Donc $i + P/2 \leq t + \Delta t < i + P$. Ainsi, la voiture atteindra le feu entre l'instant $i + P/2$ inclus et l'instant $i + P$ exclu. Or, comme i est l'instant initial du feu, le feu est au vert de l'instant $i + P/2$ inclus à l'instant i + P exclu. V1(t) = Vr permet donc de passer au vert. De plus, la valeur $V1(t)$ est maximale car Vr majore $V1(t)$.

• Pour $t \in [j ; j + P/2[$, V1(t) = $d / (i + P/2 - t)$.

Nous pouvons calculer une vitesse comme le quotient d'une distance par une durée. Si l'on considère la distance d, il nous suffit de trouver une durée $\Delta t'$ telle que $t + \Delta t' \notin \{[k \cdot P + i ; (k \cdot P + i) + P/2[\mid k \in \mathbb{N}\} \cap \mathbb{R}+$, *i.e.* que le feu soit vert à l'instant $t + \Delta t'$.

Or,

$$i + P/2 \leq t + \Delta t' < i + P \quad \Leftrightarrow \quad i + P/2 - t \leq \Delta t' < i + P - t.$$

Donc $\forall \Delta t' \in [i + P/2 - t ; i + P - t[$, $v = d/\Delta t'$ permet de passer au vert. Néanmoins, $V1(t)$ doit être maximale, ainsi, nous cherchons à minimiser $\Delta t'$. Donc $V1(t) = d / (i + P/2 - t)$.

On peut vérifier en outre que $V1(t) \leq Vr$. En effet, $i - d/Vr \leq t < i - d/Vr + P/2$, et on a :

$$\begin{aligned} i - d/Vr \leq t < i - d/Vr + P/2 &\Leftrightarrow -i + d/Vr \geq -t > -i + d/Vr - P/2 \\ &\Leftrightarrow d/Vr + P/2 \geq -t + i + P/2 > d/Vr \\ &\Rightarrow -t + i + P/2 > d/Vr \\ &\Rightarrow 1 / (i + P/2 - t) < Vr/d \\ &\Rightarrow d / (i + P/2 - t) < Vr \\ &\Rightarrow V1(t) < Vr. \end{aligned}$$

Donc $V1(t) < Vr$.

Ainsi,

$V1(t) = d / (i + P/2 - t)$ si $t \in [j ; j + P/2[$

$= Vr$ si $t \in [j + P/2 ; j + P[$

D'après la formule, $g(Vi, Vf) = -\frac{1}{2} m (Vf^2 - Vi^2)$ si $Vf \geq Vi$. Comme $V1(t) \leq Vr$, on a donc $g(V1(t), Vr) = -\frac{1}{2} m (Vr^2 - V1(t)^2)$.

D'où :

$g(V1(t), Vr) = -\frac{1}{2} m (Vr^2 - (d / (i + P/2 - t))^2)$ si $t \in [j ; j + P/2[$

$= -\frac{1}{2} m (Vr^2 - Vr^2) = 0$ si $t \in [j + P/2 ; j + P[$.

De plus,

$$\frac{\int_j^{j+P} g(V1(t), Vr)\, dt}{P} = \frac{\int_j^{j+P/2} g(V1(t), Vr)\, dt + \int_{j+P/2}^{j+P} g(V1(t), Vr)\, dt}{P} = \frac{\int_j^{j+P/2} g(V1(t), Vr)\, dt + 0}{P} = \frac{\int_j^{j+P/2} g(V1(t), Vr)\, dt}{P}.$$

Calculons donc l'intégrale $I = \int_j^{j+P/2} g(V1(t), Vr)\, dt$.

$$I = \int_j^{j+P/2} -\frac{1}{2} m \left(Vr^2 - (d / (i + P/2 - t))^2\right) dt$$

$$I = \int_j^{j+P/2} -\frac{1}{2} m\, Vr^2\, dt + \int_j^{j+P/2} \frac{1}{2} m\, d^2 / (i + P/2 - t)^2\, dt$$

$$I = \left[-\frac{1}{2} m\, Vr^2 \cdot t\right]_j^{j+P/2} + \frac{1}{2} m\, d^2 \cdot \int_j^{j+P/2} 1/(i + P/2 - t)^2\, dt$$

$$I = \left[-\frac{1}{2} m\, Vr^2 \cdot t\right]_j^{j+P/2} - \frac{1}{2} m\, d^2 \cdot \int_j^{j+P/2} -1/(i + P/2 - t)^2\, dt$$

On reconnaît la forme $u' \circ v \cdot v'$ dont la primitive est $u \circ v$ avec :

$u(x) = -1/x$ et $u'(x) = 1/x^2$

$v(x) = i + P/2 - x$ et $v'(x) = -1$.

D'où :

$$I = [-\ ½\, m\, Vr^2 \cdot t]_j^{j+P/2} - ½\, m\, d^2 \cdot [1/(-\ i\ -\ P/2\ +\ t)]_j^{j+P/2}$$

$$I = -\ ½\, m\, Vr^2 \cdot (j\ +\ P/2) - (-\ ½\, m\, Vr^2 \cdot j) - ½\, m\, d^2\ (\ 1/(-\ i\ -\ P/2\ +\ j\ +\ P/2) - 1/(-\ i\ -\ P/2\ +\ j))$$

$$I = -\ 1/4\, m\, P\, Vr^2 - ½\, m\, d^2/(-\ i\ +\ j) + ½\, m\, d^2/(-\ i\ -\ P/2\ +\ j)$$

Puisque $j = i - d/Vr$,

$$I = -\ 1/4\, m\, P\, Vr^2 - ½\, m\, d^2/(-\ i\ +\ i\ -\ d/Vr) + ½\, m\, d^2/(-\ i\ -\ P/2\ +\ i\ -\ d/Vr)$$

$$I = -\ 1/4\, m\, P\, Vr^2 - ½\, m\, d^2/(-\ d/Vr) + ½\, m\, d^2/(-\ P/2\ -\ d/Vr)$$

$$I = -\ 1/4\, m\, P\, Vr^2 + ½\, m\, d\, Vr + ½\, m\, d^2/(-\ P\, Vr/2Vr\ -\ 2d/2Vr)$$

$$I = -\ 1/4\, m\, P\, Vr^2 + ½\, m\, Vr\, d - m\, Vr\, d^2/(P\, Vr\ +\ 2d)$$

On peut donc en déduire le gain moyen de la configuration de feux choisie, valant I/P :

$$I/P = \frac{-1/4\, m\, P\, Vr^2 + ½\, m\, Vr\, d - m\, Vr\, d^2/(P\, Vr + 2d)}{P}$$

$$= -\ 1/4\, m\, Vr^2 + m\, Vr\, d/2P - m\, Vr\, d^2/(Vr\, P^2\ +\ 2dP)$$

Configuration de feux optimale (Julien)

[on explique ce que sont des feux synchronisés

on dit que les feux synchronisés, c'est le même coût que avec un unique feu si on opte pour un des deux algorithmes cités (détail important)

et on montre que c'est optimal]

Une rue dont les feux sont synchronisés est une rue dans laquelle il est possible de ne croiser aucun feu rouge si l'on roule à la vitesse maximale réglementaire. En conséquence, si le premier feu que l'on croise dans une telle rue est vert et que notre vitesse est adaptée, alors on est certain que tous les feux de la rue seront verts au moment où on les franchira.

Ainsi, par définition, si on conduit dans une telle rue, on peut se retrouver face à 2 situations :
- Soit le premier feu que l'on croise est vert, alors on n'aura jamais besoin de faire varier notre vitesse, et le coût du parcours de la rue est ainsi nul.

- Soit le premier feu que l'on croise est rouge, alors, quel que soit l'algorithme choisi, le coût de la rue se résumera au coût du premier feu, puisque dès le second feu on revient à la première situation.

Dès lors, si les feux d'une rue sont synchronisés, alors, à partir du second feu, un conducteur pourra tous les franchir à vitesse constante, quel que soit l'instant auquel il arrive. De plus, comme un feu est vert aussi longtemps qu'il est rouge, le conducteur a une chance sur 2 que le premier feu soit rouge, donc, le coût moyen de parcours d'une telle rue sur un grand nombre d'itération sera de la moitié du coût de traverse d'un feu.

Nous allons désormais comprendre pourquoi cette configuration est nécessairement optimale.
Soit une rue dépourvue de feux tricolores. Nous en ajoutons un unique, et nous retrouvons donc avec une rue à un seul feu. Celui-ci n'a pas besoin de synchronisation : il est seul.

[Ajouter une illustration]

Ajoutons en un second, et constatons ce qu'il se passe selon qu'il soit synchronisé ou non avec le premier.

[Ajouter des illustrations]

S'il est synchronisé avec le précédent, il n'y a rien de nouveau à observer : la rue est composée de feux synchronisés (fig 2).
Cependant, s'il n'est pas synchronisé, on constate que le conducteur n'est pas garanti de pouvoir traverser le second feu quel que soit l'instant où il arrive, en maintenant sa vitesse constante (fig 3), et le coût moyen de parcours augmente en conséquence.

Si nous continuons d'ajouter des feux, nous constaterons la même chose : Si un nouveau feu est synchronisé avec les précédents, tout se passera bien. Dans le cas contraire, la garantie qu'a le chauffeur de pouvoir franchir la rue en une seule fois sera compromise. La configuration en question aura donc un coût moyen plus élevé que la configuration synchronisée.

La configuration des feux synchronisés étant celle ayant le coût moyen le plus bas, elle est donc la plus optimale.

Existe-t-il toujours une façon de traverser la rue à vitesse constante ? (Alex)

[maintenant, on se demande, sachant une configuration de feux donnée, s'il existe un moyen de n'avoir aucun changement de vitesse, c'est-à-dire de parcourir la rue à vitesse constante]

Existe-t-il plusieurs façons de traverser la rue à vitesse constante ? (Alex)

texte

Périodicité d'une configuration des feux (Alex)

texte

CONCLUSION