C’est quoi l’arnaque ?

Année 2022 – 2023

Célia Lamoureux (classe de 1ère), Xuan Le, Louise Rey, Lola Raimbert (terminale)

Établissement : Lycée Maurice Genevoix, Ingré

Encadrées par : Mme Binois, Mme Rougerie

Chercheur : Philippe Grillot, Institut Denis Poisson, Université d’Orléans

Présentation du sujet

La situation de départ est la suivante : un grand magicien possède un chapeau magique, contenant un nombre infini de cartes rouges et noires.

A l’occasion de ses spectacles, il aime bien lancer un pari avec ses spectateurs lors d’un jeu de cartes. Au cours du jeu, le magicien demande à un spectateur, face à lui, de choisir un ensemble de trois cartes qui formera sa combinaison, son pari.

Il peut par exemple choisir Noir-Noir-Rouge, Rouge-Noir-Noir, Rouge-Noir-Rouge…

Une fois que le spectateur donne la combinaison choisie, le magicien choisit ensuite sa propre combinaison de trois cartes, différente de celle du spectateur.

Mais comment la choisit-il ? La donne-t-il au hasard ? Le magicien, confiant, semble jouer car il estime ses chances de gagner supérieures à celles du spectateur.

Maintenant que les deux combinaisons ont été annoncées, le magicien tire de son chapeau les cartes successivement jusqu’à ce que l’une des combinaisons soit sortie dans l’ordre.

Dès qu’une combinaison est sortie le jeu s’arrête et nous tenons un gagnant : si la combinaison du magicien sort la première, alors le magicien gagne. Et, au contraire, si c’est la combinaison du spectateur qui sort la première, alors c’est le spectateur qui gagne. La partie est terminée.

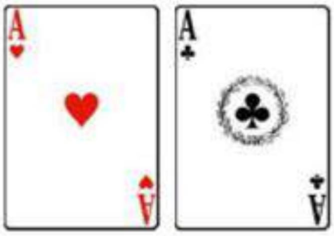
Comment le magicien choisit-il sa combinaison ? En fonction de celle du spectateur ? Va-t-il gagner ? Et à tous les coups ? C’est ce que nous avons cherché à savoir…

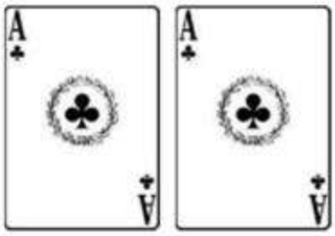
1. Un jeu « simplifié » pour commencer…

Pour simplifier notre étude nous avons commencé par étudier le cas où le spectateur choisit uniquement deux cartes.

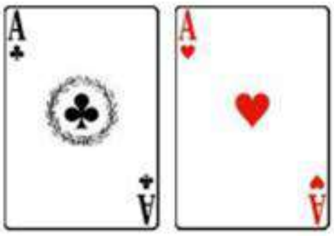
1.1. Les paris possibles

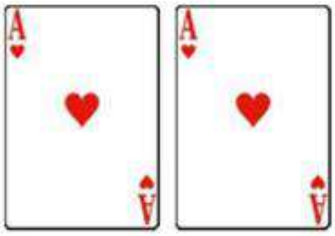
Les différentes possibilités de combinaisons sont :





On notera : RN (pour « rouge » puis « noire ») NN





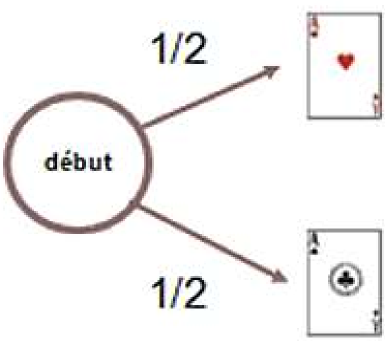
Notations : NR RR

Note : Seule la couleur « rouge » (R) ou « noire » (N) de la carte compte pour notre jeu. Pour éviter toute confusion, nous avons ici rempli le chapeau magique d’as de cœur (R) et d’as de trèfle (N).

1.2. Une première étude de cas

Commençons par l’étude du cas où le spectateur choisit la combinaison Rouge-Rouge.
Le magicien répond presque instantanément Noir-Rouge.
Nous allons représenter cette situation à l’aide d’un arbre de probabilité.

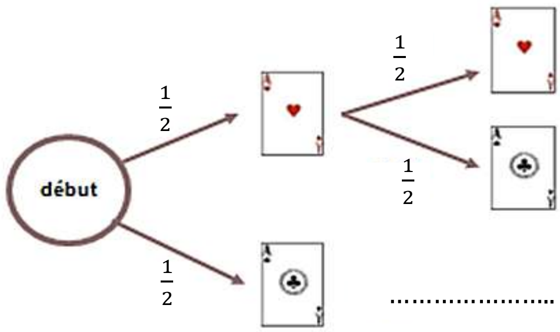
<u>À l’étape n°1 :</u>



- Au premier tirage, nous avons la même probabilité d’obtenir une carte rouge que d’obtenir une carte noire.

- On peut remarquer que dès lors qu’une carte noire est tirée, il est impossible que le spectateur gagne.
  On tirera de nouvelles cartes jusqu’à obtenir une carte rouge qui permettra au magicien de gagner avant le spectateur.

À l'étape n°2 :



évènement	probabilité
RR (le spectateur gagne)	$\frac{1}{4}$
RN	$\frac{1}{4}$

- Au deuxième tirage, nous avons seulement représenté la branche de la carte rouge. Nous pouvons maintenant établir les probabilités que le spectateur gagne et celle que le magicien gagne.
- De la même manière qu'au premier tirage, si une carte noire sort ensuite, le magicien va forcément gagner (dès qu'une carte rouge sortira).
- Le magicien a une chance sur deux de gagner dès le premier tirage et une chance sur quatre de gagner au deuxième tirage. Donc la probabilité que le magicien gagne est de 75% et celle du spectateur de 25%.
- Finalement, la seule façon de gagner pour le spectateur est d'obtenir RR avec les deux premières cartes tirées.

Propriété : Lorsque le spectateur parie sur la combinaison RR et le magicien sur la série NR, la probabilité que le spectateur gagne est de 25%, celle du magicien est de 75%.
Celui-ci gagne donc trois fois plus souvent que le spectateur.

Autres cas possibles

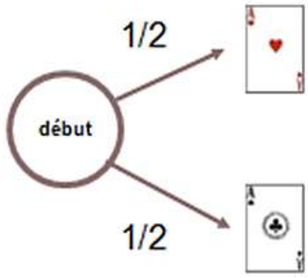
Par « symétrie », si le spectateur choisit N-N (Noir-Noir), le magicien choisit R-N (Rouge-Noir) et dès lors qu'une carte rouge est tirée, le magicien est assuré de gagner. Les probabilités de victoires du magicien et du spectateur restent inchangées.

Propriété : Lorsque le spectateur parie sur la combinaison NN et le magicien sur la série RN, la probabilité que le spectateur gagne est de 25%, celle du magicien est de 75%.

Celui-ci gagne donc trois fois plus souvent que le spectateur.

1.3. Une situation un peu différente…

Étudions le cas où le spectateur choisit la combinaison Rouge-Noir. Le magicien répond presque instantanément Noir-Rouge. Nous allons représenter cette situation à l'aide d'un arbre de probabilités.



- Au premier tirage nous avons la même probabilité d'obtenir une carte rouge et une carte noire.
- On peut remarquer que dès lors qu'une carte noire est tirée, il est impossible que le spectateur gagne. On tirera une infinité de cartes noires ou l'on tirera forcément une carte rouge qui permettra au magicien de gagner avant le spectateur.
- De la même manière, si une carte rouge est sortie, elle assurera une victoire certaine au spectateur.

L'étude menée dans le paragraphe 1.2. assure que le magicien ne peut pas faire mieux puisqu'en pariant par exemple NN ou RR contre RN, il perdrait dans 75% des cas (1).

Propriété :
Lorsque le spectateur parie sur la combinaison RN et le magicien sur la série NR, le magicien a donc dans ce cas 50% de chance de gagner, et le spectateur a 50% de chance de gagner.

De même, lorsque le spectateur parie sur la combinaison NR et le magicien sur la série RN, le magicien a donc dans ce cas 50% de chance de gagner, et le spectateur a 50% de chance de gagner.

Synthèse :

- ✓ Si le spectateur choisit RN (ou NR), le magicien choisit alors : NR (ou RN).
  Ils ont alors tous les deux une probabilité de victoire égale à 50 %.
- ✓ Si le spectateur choisit RR (ou NN), le magicien choisit alors : NR (ou RN).
  Le magicien gagne alors avec une probabilité de $\frac{3}{4}$ (contre $\frac{1}{4}$ pour le spectateur).
- ✓ **En moyenne, si on imagine que les spectateurs choisissent sans stratégie particulière, le magicien gagne finalement dans 62,5% des cas**

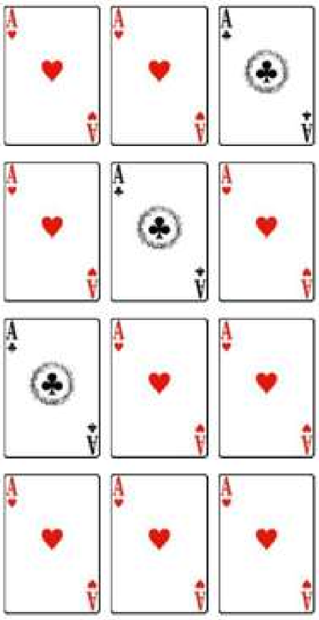
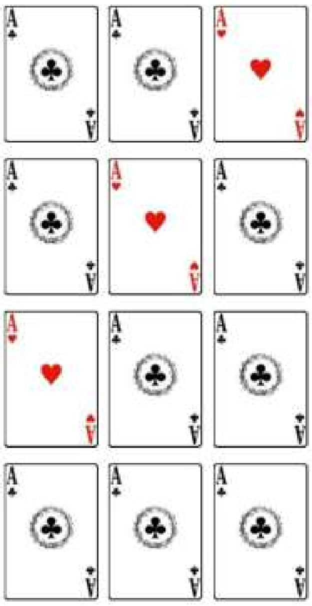
Le cas à 2 cartes étant résolu, passons à notre jeu initial, plus complexe, à 3 cartes.

Nous avons commencé par faire beaucoup… beaucoup… de parties pour essayer de deviner une stratégie pour le magicien.

2. Paris sur des séries de trois cartes

2.1. Les paris possibles

Le spectateur choisit 3 cartes dans les combinaisons possibles :

2.2. Un programme pour simuler des parties

Afin de pouvoir tester différentes stratégies du magicien sur un grand nombre de parties, nous avons choisi de la modéliser à l’aide du langage de programmation Python.

```
from random import*
i = 0
VS=0
VM=0
while i < 1000000:
    def list(k):
        L = []
        for i in range (k):
            u = randint (0,1)
            L.append (u)
        return (L)
    tirage= list(10000)
    S= list(3)
    if S[1] == 0:
        D = 1
    else:
        D = 0
    E= S[0]
    F= S[1]
    M= [D,E,F]
    print("joueur       ",S)
    print("magicien    ",M)
    fin=0
    n=0
```

- La variable S correspond à la série de trois cartes pariée par le spectateur.

La variable M contient le pari du magicien (élaboré selon la stratégie que nous détaillerons dans le paragraphe suivant).

→ On commence par définir les variables VS et VM qui comptabilisent le nombre de victoires du spectateur et du magicien respectivement. On ajoutera 1 à l'une des variables à la fin de chaque partie selon l'issue.

→ On crée une boucle afin de programmer un grand nombre de simulations. Ici, on choisit de répéter l'expérience 1.000.000 de fois.

→ On réalise un tirage aléatoire d'un entier (int) entre 0 (pour « noir ») et 1 (pour « rouge ») qui simule le tirage d'une carte.

→ On étudie le premier bloc de 3 éléments de la liste que l'on compare aux combinaisons du spectateur et du magicien. Si on observe une correspondance alors on ajoute 1 à la variable du gagnant (VS ou VM)

```
    while fin==0:
        bloc=[tirage[n],tirage[n+1],tirage[n+2]]
        if S== bloc:
            print ("le spectateur a gagné après avoir tiré  ",n+3,"  cartes")
            fin=1
            VS=1+VS
        elif M== bloc:
            print ("le magicien a gagné après avoir tiré  ",n+3,"  cartes")
            fin=1
            VM=1+VM
        n=n+1
    i = i+1
print("La probabilité que le spectateur gagne est de   ",VS/i)
print("La probabilité que le magicien gagne est de    ",VM/i)
```

→ S'il n'y trouve pas de coïncidence alors, il recommence la comparaison en prenant le bloc suivant : le 2ème élément de la liste devient le 1er, le 3ème devient le 2ème… et recommence jusqu'à la victoire de l'un des 2 joueurs.

→ Il simule des parties 1.000.000 fois comme demandé avant de renvoyer la probabilité de victoires du spectateur et du magicien sur la totalité des combinaisons et tirages testés.

Sur autant de simulations, on peut considérer que cette moyenne expérimentale est très proche de la valeur théorique. Nous avons trouvé, lors d'une exécution de programme, que la probabilité que le magicien gagne est de 0,73985.

Pour la suite de notre étude, nous allons étudier la probabilité pour que le magicien gagne en fonction des cartes du spectateur qui, lui, peut choisir sa combinaison parmi les 8. Mais nous allons travailler seulement sur 4 combinaisons car la probabilité de tirer noir et rouge est la même. Les cas non traités se déduiront donc facilement des cas détaillés ici.

2.3. Stratégie du magicien

Nous allons établir le résultat suivant : (2)

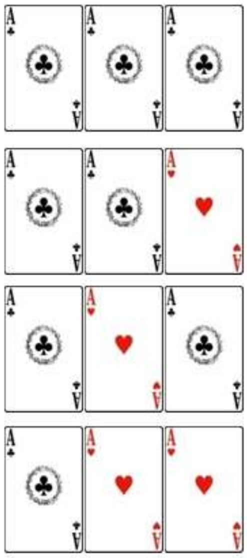
Théorème :
Pour maximiser ses chances de gagner, le magicien choisit sa combinaison par rapport à celle du spectateur :

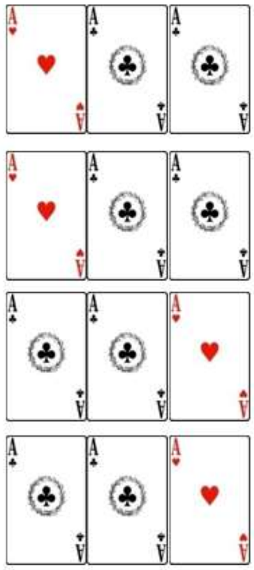
- **Sa première carte est l'inverse de la deuxième du spectateur.**
- **Ses deux dernières cartes sont les deux premières du spectateur**

Les quatre cas possibles (à inversion de couleur près) :

Le spectateur choisit…

Le magicien choisit en conséquence…

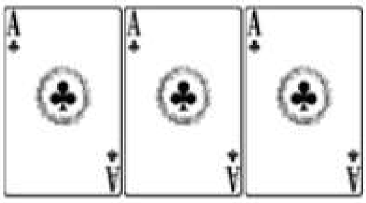




2.3.1. Un premier cas

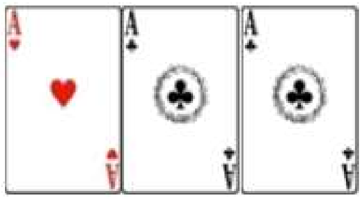
On étudie pour commencer le cas suivant :

Spectateur :



NNN

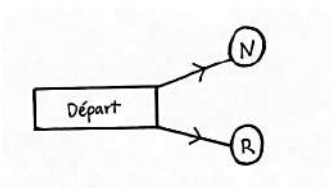
Magicien :



RNN

Le graphe modélise une partie avec ces combinaisons choisies :

- Le spectateur choisit : N-N-N
- Le magicien choisit : R-N-N



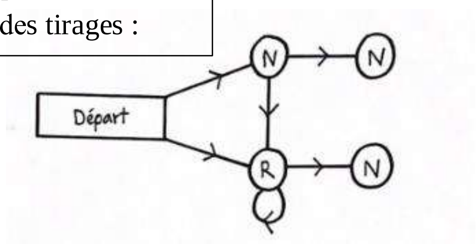
1er tirage

1er tirage :

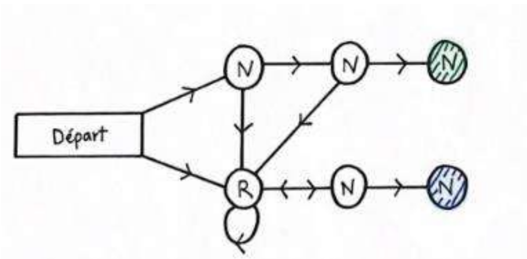
- Si la carte tirée est noire le spectateur entame sa combinaison.
- Si elle est rouge le magicien entame la sienne.

Une « boucle » est présente sur le « R » car, si on tire une carte rouge après une autre carte rouge, le spectateur en est au même point de son pari (un premier R) et le magicien, de son côté, n’a pas avancé.

Une première représentation de l’enchaînement des tirages :



2eme tirage



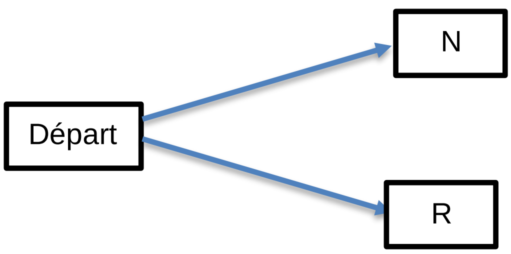
3eme tirage

3ème tirage : la majorité des flèches sont orientées vers le bas du graphe donc vers une victoire du magicien.

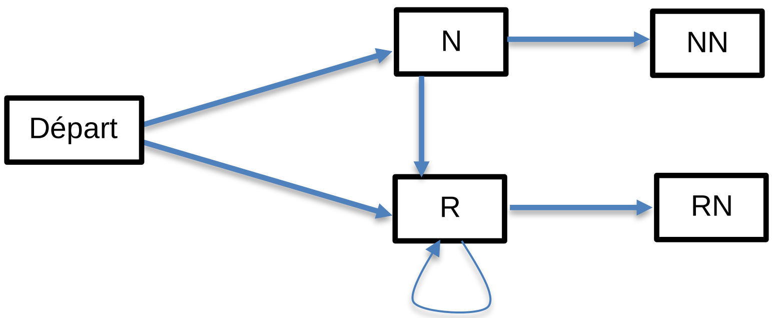
On ne voit pas bien apparaître sur ces schémas l’avancée de la partie.

On préfèrera noter dans les bulles la position la plus avancée dans l’une ou l’autre des combinaisons pariées par les deux joueurs.

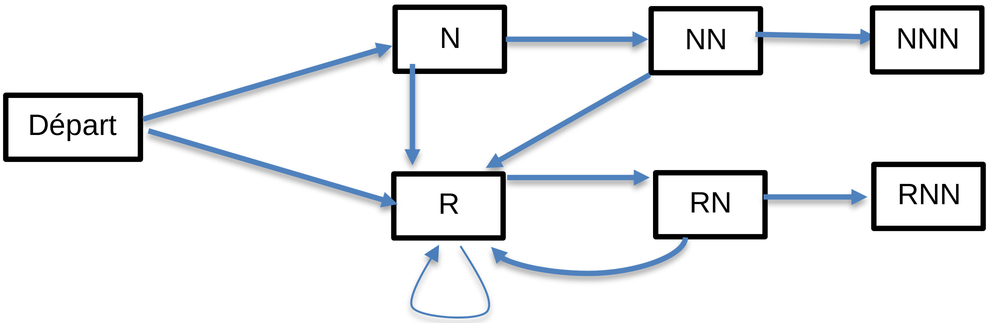
Représentation de l’enchaînement de deux tirages que nous allons utiliser dans la suite de l’article :



1er tirage



2ème tirage



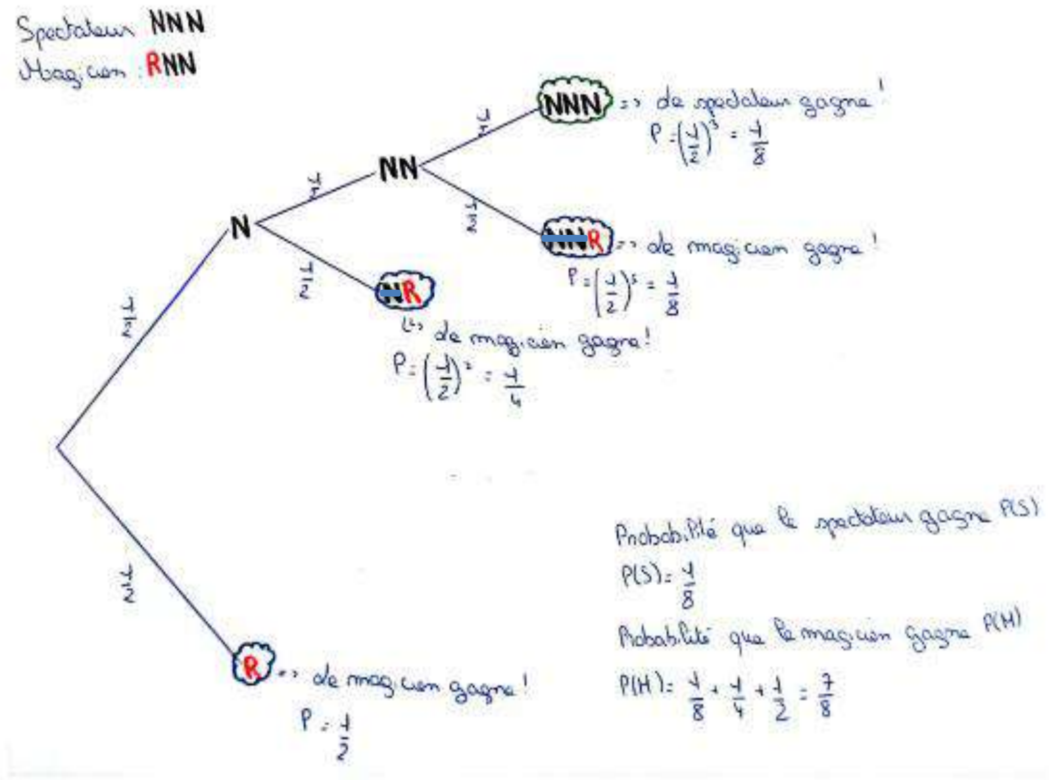
3$^{\text{ème}}$ tirage

On remarque que dès qu'une carte rouge est tirée, il est impossible pour le spectateur de gagner.

On a utilisé le script Python pour simuler des milliers de parties dans lesquelles le spectateur prend NNN et le magicien RNN : on trouve que la probabilité que le spectateur gagne est de 0,125 et elle est de 0,875 pour le magicien.

```
le spectateur a gagné après avoir tiré   3   cartes
le magicien a gagné après avoir tiré   3   cartes
le magicien a gagné après avoir tiré   7   cartes
le magicien a gagné après avoir tiré   4   cartes
le magicien a gagné après avoir tiré   9   cartes
le magicien a gagné après avoir tiré   5   cartes
le magicien a gagné après avoir tiré   7   cartes
le spectateur a gagné après avoir tiré   3   cartes
La probabilité que le spectateur gagne est de    0.12508333333333332
La probabilité que le magicien gagne est de     0.8749166666666667
```

Nous avons ensuite essayé de retrouver ces probabilités grâce à un arbre :

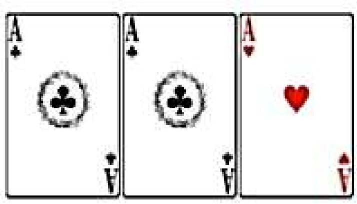


Comme nous l'avons déjà dit, dès qu'une carte rouge est tirée, il est impossible pour le spectateur de gagner et les branches correspondantes de cet arbre conduiront ainsi à coup sûr à une victoire du magicien.

Propriété : Lorsque le spectateur parie sur la combinaison NNN et le magicien sur la série RNN, la probabilité que le spectateur gagne est de $\frac{1}{8}$, soit 12,5%, celle du magicien est de $\frac{7}{8}$ soit 87,5%. Celui-ci gagne donc trois fois plus souvent que le spectateur.

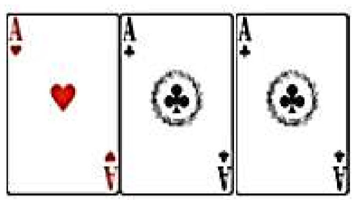
2.3.2. Un deuxième cas

Le spectateur choisit :



NNR

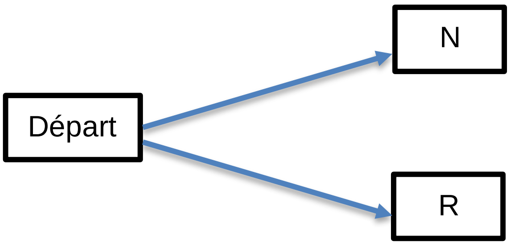
Le magicien choisit :



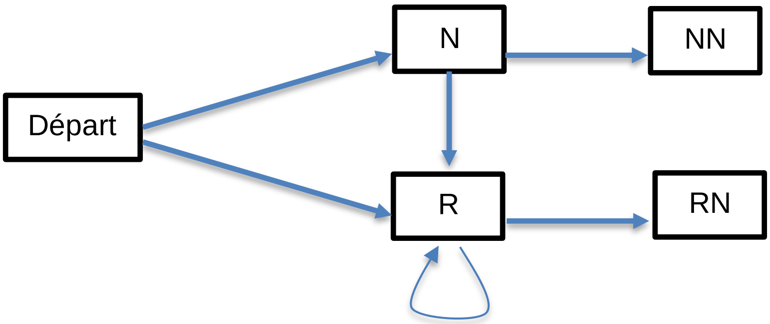
RNN

Graphe qui reproduit une partie de carte avec ces combinaisons (cas NNR contre RNN) :

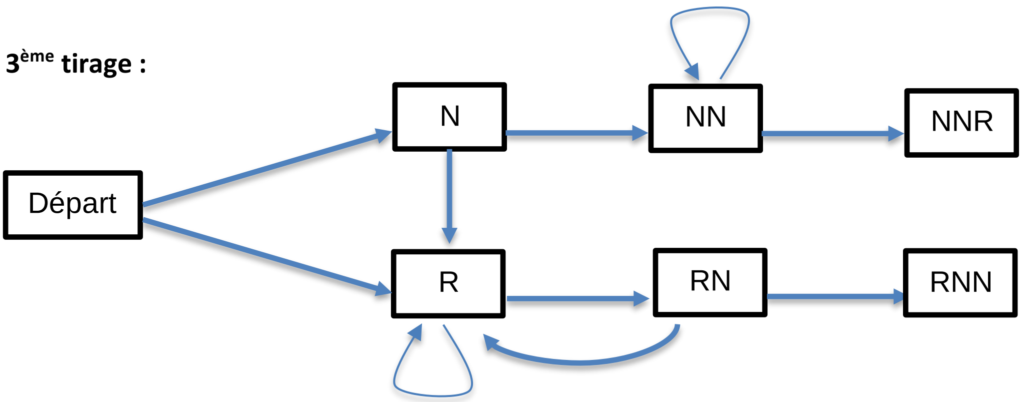
1er tirage :



2ème tirage :



3ème tirage :



On remarque ici que dès que deux cartes noires sont tirées, c'est le spectateur qui gagne mais que, lorsqu' une carte rouge est tirée (si elle n'est pas précédée de deux cartes noires), c'est le magicien qui gagne à tous les coups.

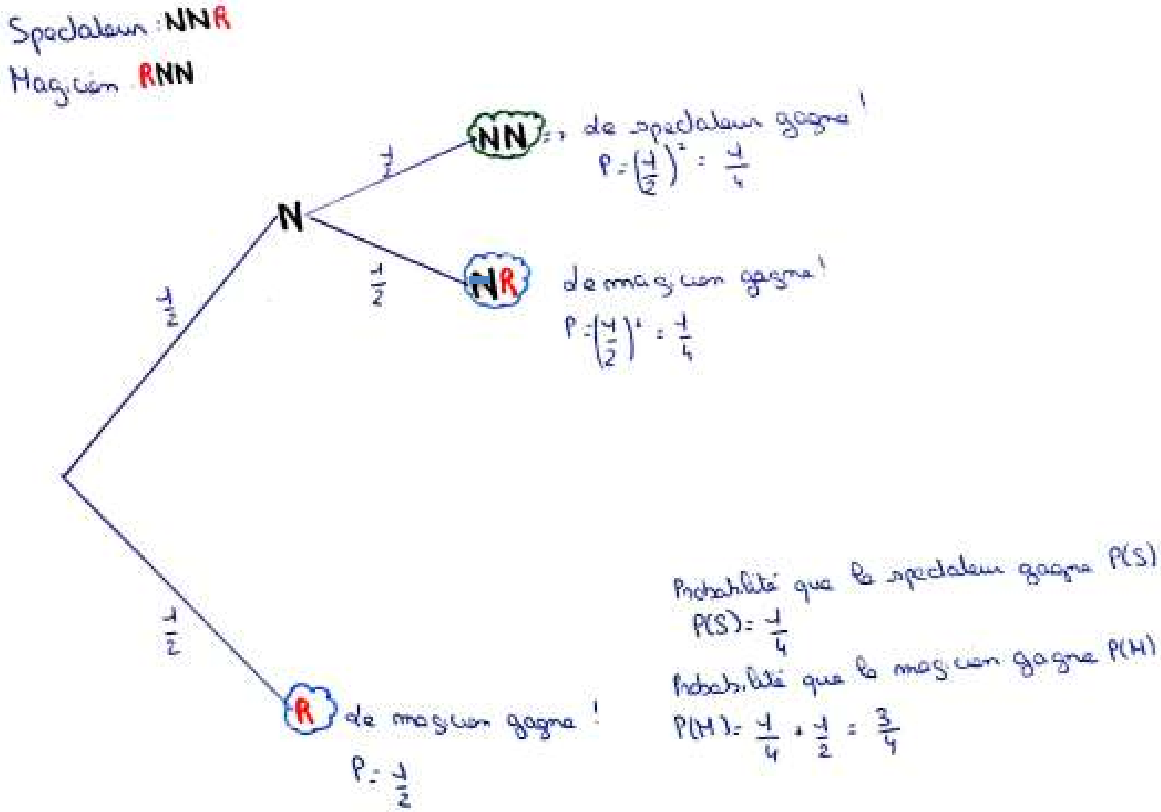
Impossible de « remonter » sur la partie haute de ce schéma dès qu'on est engagé dans sa partie basse.

Comme pour le premier cas, on observe des flèches sont « plus orientées » vers le bas du graphe donc « vers » une victoire du magicien.

Après un grand nombre de parties réalisées, on remarque que la probabilité que le spectateur gagne se rapproche de 0,25 et la probabilité que le magicien gagne se rapproche de 0,75.

```
le spectateur a gagné après avoir tiré   3   cartes
le magicien a gagné après avoir tiré   7   cartes
le magicien a gagné après avoir tiré   7   cartes
le spectateur a gagné après avoir tiré   3   cartes
La probabilité que le spectateur gagne est de    0.24871666666666667
La probabilité que le magicien gagne est de    0.7512833333333333
```

Ces probabilités peuvent se calculer grâce à l'arbre suivant :



Nous n'avons pas prolongé davantage les branches de l'arbre : même si on ne sait pas en combien de coups cela se produira, nous connaissons le futur vainqueur.

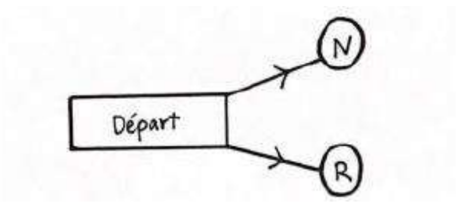
Nous obtenons :

- **La probabilité que le spectateur gagne =** $\frac{1}{4}$ **= 0,25.**
- **La probabilité que le magicien gagne =** $\frac{3}{4}$ **= 0,75.**

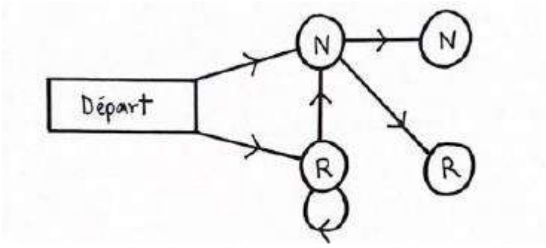
2.3.3. Troisième cas

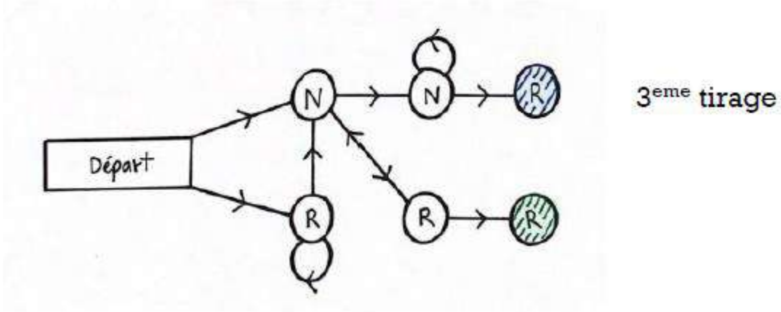
Si le spectateur choisit la combinaison **Noir-Rouge-Rouge**,
le magicien choisit automatiquement **Noir-Noir-Rouge**.

Graphe qui reproduit une partie de carte avec ces combinaisons, avec notre première représentation :

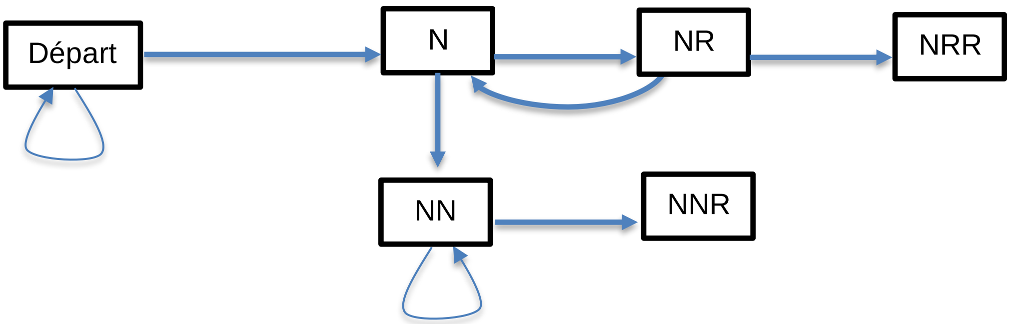


1er tirage





Graphe regroupant toutes les étapes : NRR (spectateur) contre NNR (magicien)



On peut remarquer, à l'aide des résultats du script Python que nous avons réalisé, que la probabilité que le magicien gagne était de 0,66545, soit environ deux tiers. Nous avons alors essayé de retrouver ce résultat par le calcul.

Tout d'abord, notons que dès que deux cartes noires sortent, le magicien aura automatiquement gagné puisque, même si une infinité de cartes noires sortent, il y aura toujours une carte rouge après (3). Donc nous pouvons arrêter la branche de l'arbre de probabilité. Notons également que les deux combinaisons commencent par une carte noire, donc le nombre de cartes rouges qui sortent en premier n'importe pas. Par conséquent, nous pouvons faire un arbre de probabilité qui commence par une carte noire. Ainsi nous pouvons considérer que la probabilité d'avoir une carte noire au début est 1.

Ensuite, si une carte noire sort, le magicien a gagné.

Il a donc déjà 1 chance sur 2 de gagner.
Avec Noir-Rouge, l'arbre se prolonge.
Si une carte rouge sort en troisième carte, alors le spectateur gagne. Ce dernier a donc une probabilité de $1/2^2$ de gagner, soit 1/4.
La branche Noir-Rouge-Noir continue. Si une carte noire sort, le magicien gagne avec une probabilité de 1/8. Sinon les cartes sorties sont Noir-Rouge-Noir-Rouge. Si la carte suivante est rouge, le spectateur gagne avec une probabilité de 1/16.
Si une carte noire sort, l'arbre continue avec la branche Noir-Rouge-Noir-Rouge-Noir.
Si la prochaine carte est une carte noire, alors le magicien gagnera avec une probabilité de 1/32.

On remarque que l'arbre se poursuit à l'infini mais qu'un schéma se dessine.

En effet, si l'on additionne toutes les probabilités du magicien, on obtient 1/2 + 1/8 + 1/32… alors que celle du spectateur est 1/4 + 1/16 + 1/64…

Un théorème fourni par notre enseignant-chercheur Philippe Grillot nous a permis de calculer ces probabilités. En effet, les probabilités que le magicien gagne peuvent s'écrire $1/2^1 + 1/2^3 + 1/2^5 + 1/2^7$… ce qui est donc la somme de $1/2^{2p+1}$, avec p allant de 0 à + l'infini. En factorisant, nous pouvons obtenir ½ $(1 + 1/2^2 + 1/2^4…)$, ce qui donne $1/2 \times$ la somme de $(1/2^2)^n$, avec n allant de 0 à + l'infini.

p jusqu'à $+\infty$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^7}+\ldots=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{2p+1}}$$

on débute à $p=0$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\ldots\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\left(\frac{1}{2^2}\right)^1+\left(\frac{1}{2^2}\right)^2+\left(\frac{1}{2^2}\right)^3+\ldots\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^2}\right)^n\right)$$

Le théorème nous indique que pour x se situant entre –1 et 1 exclus, la somme de x^n avec n allant de 0 à + l'infini est égale à $1/(1-x)$ (4). Dans notre cas, x serait $1/2^2$. Donc en appliquant le théorème, nous trouvons que la probabilité du magicien est $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-1/2^2}$. En simplifiant cette écriture, nous avons fini par trouver que :

Propriété : La probabilité que le magicien gagne est $\frac{2}{3}$, celle du spectateur est donc $1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$.

Théorème : pour $x \in]-1;1[$, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \boxed{\frac{1}{1-x}}$

$$\text{D'où } \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{2p+1}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\left(\frac{1}{2^2}\right)}\right) \quad \text{où } \frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$$

$$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3/4}\right)$$

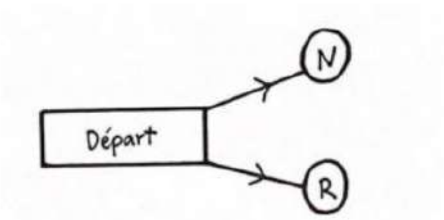
$$=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}$$

$$=\frac{2}{3}$$

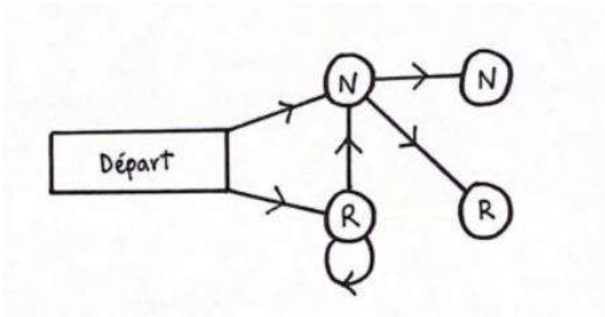
2.3.4. Quatrième cas :

Maintenant, nous allons voir le cas où le spectateur choisit **Noir-Rouge-Noir.**
Le magicien prendra par conséquence **Noir-Noir-Rouge**.

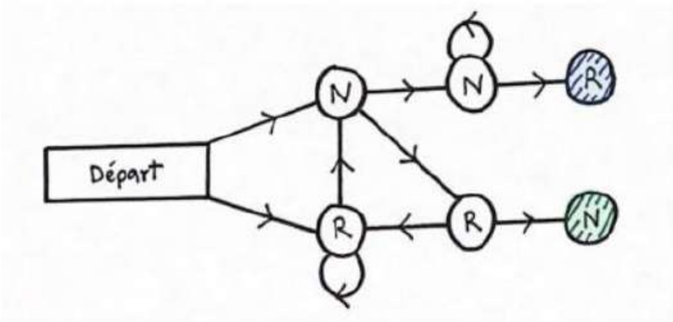
Graphe qui reproduit une partie de carte avec ces combinaisons :



1er tirage



2eme tirage



3eme tirage

Cette fois, selon le programme Python, la probabilité que le magicien gagne est 0,66725, ce qui fait encore une probabilité d'environ 2/3.

L'arbre de probabilité nous démontre que la probabilité de gain du magicien est encore $1/2 + 1/2^3 + 1/2^5$...

Nous pouvons donc conclure, en appliquant à nouveau le théorème, que la probabilité que le magicien gagne est ici aussi 2/3 et que celle du spectateur est par conséquent 1/3.

Conclusion : Ainsi nous avons étudié les probabilités des quatre combinaisons possibles.

Pour trouver la probabilité que le magicien gagne peu importe la combinaison, il faut faire la moyenne.

Donc, la probabilité que le magicien gagne avec trois cartes est égale à environ 0,7395833.

3. Cas à 4 cartes

Pour le cas à 4 cartes, nous n'avons malheureusement pas eu le temps de trouver les calculs. Néanmoins, nous avons créé un programme python de forme similaire pour, comme dans le cas précédent, déterminer la probabilité que le magicien aurait de gagner (ci-dessous) (5).

```python
from random import*
i = 0
VS=0
VM=0
SOMME_M=0
SOMME_S=0
while i < 6000:
    def list(k):
        L = []
        for i in range (k):
            u = randint (0,1)
            L.append (u)
        return (L)
    tirage= list(10000)
    S= list(4)
    if S[1] == 0:
        D = 1
    else:
        D = 0
    E= S[0]
    F= S[1]
    G= S[2]
    M= [D,E,F,G]
    print("joueur      ",S)
    print("magicien   ",M)
    fin=0
    n=0
    while fin==0:
        bloc=[tirage[n],tirage[n+1],tirage[n+2],tirage[n+3]]
        if S== bloc:
            print ("le spectateur a gagné après avoir tiré  ",n+4,"  cartes")
            fin=1
            VS=1+VS
            SOMME_S=SOMME_S+n+4
        elif M== bloc:
            print ("le magicien a gagné après avoir tiré  ",n+4,"  cartes")
            fin=1
            VM=1+VM
            SOMME_M=SOMME_M+n+4

        n=n+1
    i = i+1
print("La probabilité que le spectateur gagne est de   ",VS/i)
print("La probabilité que le magicien gagne est de    ",VM/i)
print("la moyenne du nombre de cartes tirées quand le magicien gagne est de    ",SOMME_M/i)
if SOMME_S>0:
    print("la moyenne du nombre de cartes tirées quand le spectateur gagne est de    ",SOMME_S/i)
```

Notes d'édition

(1) Le choix NN contre RN a bien 75% de chances d'être perdant comme il est montré au § 1.2, mais ce n'est pas le cas pour RR contre RN : alors les deux joueurs doivent attendre une carte rouge, puis au tirage suivant on obtient RR ou RN selon la dernière carte sortie ; on a donc une probabilité de gain de 50% pour chacun.

(2) Plus précisément, il va être montré que la stratégie présentée ici donne une probabilité de gain de 7/8, 3/4 ou 2/3 pour le magicien, selon la combinaison choisie par le spectateur, donc que c'est une bonne stratégie. Par contre, il n'est pas montré que c'est celle qui maximise les chances de gain.

Il est surtout remarquable que, quelle que soit la combinaison choisie par le spectateur, le magicien peut en choisir une autre qui lui donnera une probabilité de gain strictement supérieure à 1/2.

(3) On peut plutôt dire que la probabilité qu'il ne sorte que des cartes noires à partir d'un certain moment est nulle.

(4) Cette somme infinie est par définition la limite des sommes finies $\sum_{k=0}^{n} x^k$, qui d'après l'expression des sommes d'une série géométrique sont égales à $(1-x^{n+1})/(1-x)$ si $x \neq 1$. Et si $|x| < 1$, alors $x^{n+1} \to 0$ lorsque $n \to \infty$, donc on trouve bien la limite $1/(1-x)$.

(5) Une stratégie est choisie dans ce programme : le magicien prend comme première couleur celle opposée à la deuxième du spectateur puis il reprend les trois premières couleurs du spectateur dans l'ordre.