FRACTIONS EGYPTIENNES

Collège Le Grand Som

Adam SPITALE, Célia MEYNARD (3èmes), Thomas PELTIER, Romane BLANC, Loane PELLICIER (5èmes), Lara VACHON, Tymaël JUGAND-MONOT (4èmes)

Présentation du sujet

Il y a plus de trois mille ans, les Égyptiens n'utilisaient pas notre notation décimale.

Mais ils savaient décomposer les fractions plus petites que 1 en une somme de fractions de la forme 1/n où tous les n sont toujours différents et entiers.

Exemple de développement en fractions égyptiennes : $\frac{2}{3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$

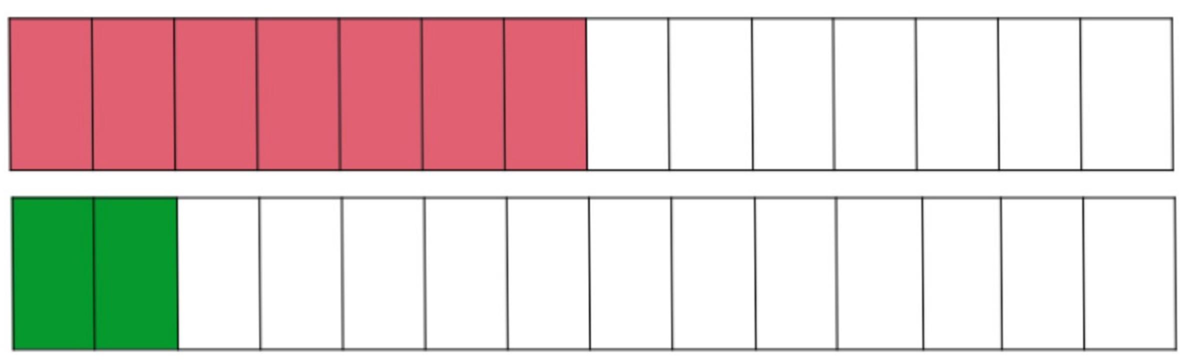
QUESTIONS :

1) Est-ce que toutes les fractions positives, plus petites que 1, admettent un développement en fractions égyptiennes ?

2) Peut-on trouver un procédé automatique pour produire un tel développement ?

Comment additionner des fractions ?

Exemple : $\frac{1}{2}+\frac{1}{7}$



$\frac{7}{14}=\frac{1}{2}$

$\frac{2}{14}=\frac{1}{7}$

$$donc\ \frac{1}{2}+\frac{1}{7}=\frac{7}{14}+\frac{2}{14}=\frac{9}{14}$$

Ci-dessus les rectangles sont découpés en 14 parties car 14 est un multiple de 7 et de 2.

Cas général :

$$\frac{numérateur\,1}{dénominateur\,1}+\frac{numérateur\,2}{dénominateur\,2}=\frac{n1\times d2}{d1\times d2}+\frac{n2\times d1}{d2\times d1}=\frac{n1\times d2+n2\times d1}{d1\times d2}$$

Autre exemple : $\frac{3}{7}+\frac{4}{5}=\frac{3\times5}{7\times5}+\frac{4\times7}{5\times7}=\frac{3\times5+4\times7}{5\times7}=\frac{43}{35}$

Recomposition de fractions

- Pour apprendre à décomposer des fractions nous les avons recomposées : c'est-à-dire que l'on additionne des fractions de la forme 1/n et on regarde quelle fraction on obtient.

Exemple : $\frac{1}{6}+\frac{1}{10}=\frac{10}{60}+\frac{6}{60}=\frac{16}{60}$

- Pour créer des formules nous avons dû apprendre à nous servir des lettres pour remplacer les nombres.

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1\times b}{a\times b}+\frac{1\times a}{b\times a}=\frac{b}{a\times b}+\frac{a}{a\times b}=\frac{a+b}{a\times b}$$

Exemple : $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1\times3}{2\times3}+\frac{1\times2}{3\times2}=\frac{3}{2\times3}+\frac{2}{2\times3}=\frac{2+3}{2\times3}=\frac{5}{6}$

Développement en fractions égyptiennes

1ère découverte : $\boxed{\frac{1}{A}=\frac{1}{A+1}+\frac{1}{A(A+1)}}$

Preuve : $\frac{1}{A+1}+\frac{1}{A(A+1)}=\frac{A\times1}{A\times(A+1)}+\frac{1}{A(A+1)}=\frac{A+1}{A(A+1)}=\frac{1}{A}$

Exemple : $\frac{1}{7}=\underbrace{\frac{1}{(7+1)}}_{\frac{1}{8}}+\underbrace{\frac{1}{(7(7+1))}}_{\frac{1}{56}}$

2ème découverte : $\boxed{\frac{2}{A}=\frac{1}{A}+\frac{1}{A+1}+\frac{1}{A(A+1)}}$

Preuve :

$$\frac{1}{A}+\frac{1}{A+1}+\frac{1}{A(A+1)}=\frac{1}{A}+\frac{A\times1}{A\times(A+1)}+\frac{1}{A(A+1)}=\frac{1}{A}+\frac{A+1}{A(A+1)}=\frac{1}{A}+\frac{1}{A}$$

Exemple : $\frac{2}{7}=\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{56}$

3ème découverte : développement de $\frac{3}{A}$

$$\frac{3}{A}=\frac{1}{A}+\underbrace{\frac{1}{A+1}+\frac{1}{A(A+1)}}_{\frac{1}{A}}+\underbrace{\frac{1}{A+2}+\frac{1}{(A+1)(A+2)}+\frac{1}{A(A+1)+1}+\frac{1}{A(A+1)(A(A+1)+1)}}_{\frac{1}{A}}$$

Exemple : $\frac{3}{7}=\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{56}+\frac{1}{9}+\frac{1}{72}+\frac{1}{57}+\frac{1}{3192}$

Pour vérifier que toutes les fractions sont différentes, on a programmé les calculs dans un tableur :

Valeur de A	A+1	A(A+1)	A+2	(A+1)(A+2)	A(A+1)+1	(A(A+1))(A(A+1)+1)
2	3	6	4	12	7	42
3	4	12	5	20	13	156
4	5	20	6	30	21	420
5	6	30	7	42	31	930
6	7	42	8	56	43	1806
7	8	56	9	72	57	3192
8	9	72	10	90	73	5256
9	10	90	11	110	91	8190
10	11	110	12	132	111	12210
11	12	132	13	156	133	17556
12	13	156	14	182	157	24492
13	14	182	15	210	183	33306
14	15	210	16	240	211	44310
15	16	240	17	272	241	57840

On a programmé les formules de décomposition dans scratch :